

Zestaw 1 / Matematyczne Metody Fizyki I

1. Znając wartości funkcji sinus i cosinus dla kątów: $\pi/3$, $\pi/4$ oraz $\pi/6$ pokaż, że

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

korzystając z: a) wzoru na sumę sinusów kątów $\pi/3$ i $\pi/6$; b) wzoru na sinus sumy kątów $\pi/3$ i $\pi/4$ oraz związku $\sin(\pi/2 + \phi) = \cos \phi$

2. Korzystając z tożsamości $\sin 2\phi = 2 \sin \phi \cos \phi$ pokaż, że jeśli $s = \sin \pi/8$ to spełnione jest równanie

$$8s^4 - 8s^2 + 1 = 0$$

Rozwiąż je w celu obliczenia $\sin \pi/8$ ($\sin \pi/4 = 1/\sqrt{2}$)

3. Korzystając ze wzorów na sumę lub różnicę funkcji sinus lub cosinus dwóch kątów znajdź wszystkie rozwiązania równania

$$\sin \phi + \sin 4\phi = \sin 2\phi + \sin 3\phi$$

dla $-\pi < \phi \leq \pi$. Jaka jest krotność pierwiastka $\phi = 0$?

4. Korzystając z zasady indukcji matematycznej pokaż, że suma wyrazów ciągu arytmetycznego

$$a_{n+1} = a_n + d, n \geq 0, \text{ dana jest wzorem } \sum_{k=0}^n a_k = \frac{1}{2}(n+1)(a_0 + a_n) = \frac{(2a_0 + nd)(n+1)}{2}$$

5. Korzystając z zasady indukcji matematycznej pokaż, że suma wyrazów ciągu potęg, $a \neq 1$,

$$n \geq 0, \text{ dana jest wzorem } \sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

6. Metodą różniczkowania wzoru na sumę wyrazów ciągu potęg oblicz $\sum_{k=1}^n ka^k$

7. Różnikując zmodyfikowany wzór na sumę wyrazów ciągu potęg $(a-1) \sum_{k=0}^n a^k = a^{n+1} - 1$

$$\text{oblicz: } \sum_{k=1}^n k$$

8. Wykaż, że: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

9. Odpowiednio dobierając wartości a i b w rozwinięciu Newtona $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$$\text{znajdź wyrażenia na } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

10. Metodą różniczkowania rozwinięcia Newtona oblicz: $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$

11. Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykaż, że:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{b) liczba } 10^n - 1 \text{ jest podzielna przez 9 dla } n \geq 1$$