Zestaw 10 / Matematyczne Metody Fizyki I

Proszę rozwiązać zadania z poprzedniego zestawu, których nie zdążyliśmy zrobić na ostatnich ćwiczeniach.

1. Znajdź zbiory napinające wszystkie cztery podstawowe podprzestrzenie macierzowe związane z macierzą:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

2. Dane są wektory w $\mathcal{R}^4$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad e'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e'_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e'_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sprawdź, że wektory $\{e'_i\},\ i = 1, .., 4$ tworzą bazę w $\mathcal{R}^4$. Znajdź współrzędne wektora x w bazie $\{e'_i\}$

3. Dane są dwie bazy wektorów w przestrzeni $\mathcal{R}^3$ $\{e_i\}$ oraz $\{e'_i\}$, $\ i = 1, 2, 3$:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad e'_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad e'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad e'_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Niech wektor $\vec{x}$ ma współrzędne $(1, 2, 3)$ w bazie $\{e_i\}$. Znajdź współrzędne tego samego wektora w bazie $\{e'_i\}$.

4. Pokaż, że odwzorowanie $T(x, y, z) = (x - y, y - x, x - z)$ jest odwzorowaniem liniowym w przestrzeni $\mathcal{R}^3$. Rozważmy wektor $\vec{\mathrm{v}}$ i bazę $\mathcal{B}$ zadane przez:

$$\vec{\mathrm{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Znajdź współrzędne wektora $\vec{\mathrm{v}}$ oraz reprezentację macierzową $[T]_{\mathcal{B}}$ operatora T w bazie $\mathcal{B}$.
b) Następnie oblicz $[T(\vec{\mathrm{v}})]_{\mathcal{B}}$ i przekonaj się, że $[T]_{\mathcal{B}}\,[\vec{\mathrm{v}}]_{\mathcal{B}} = [T(\vec{\mathrm{v}})]_{\mathcal{B}}$.