Zestaw 11 / Matematyczne Metody Fizyki I

Proszę rozwiązać zadania z poprzedniego zestawu, których nie zdążyliśmy zrobić na ostatnich ćwiczeniach.

1. Znajdź wartości własne i odpowiadające im wektory własne macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Oblicz wartości i unormowane wektory własne macierzy Pauliego. Ponieważ macierze Pauliego są hermitowskie, sprawdź czy wszystkie wartości własne są rzeczywiste, a wektory własne każdej macierzy Pauliego do różnych wartości własnych są wzajemnie ortogonalne. Macierze Pauliego odgrywają istotną rolę w mechanice kwantowej i mają postać:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Znaleźć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 4 \end{bmatrix}$$

gdzie α jest dowolną liczbą. Czy istnieje α taka, że wektory własne macierzy A są ortogonalne? Sprawdź, że wyznacznik tej macierzy jest równy iloczynowi a jej ślad zaś sumie wartości własnych.