

Zestaw 12 / Matematyczne Metody Fizyki I

1. Znajdź wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \frac{i}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & i & i & 0 \\ -i & 2 & 0 & i \\ -i & 0 & 2 & i \\ 0 & -i & -i & 2 \end{bmatrix}$$

Zdiagonalizuj te macierze poprzez unitarną transformację podobieństwa.

2. Znajdź piętnaste potęgi macierzy z poprzedniego zadania korzystając z:

- postaci diagonalnej tych macierzy,
- twierdzenia Cayleya-Hamiltona.

3. Znajdź bezpośredni przepis na n -ty wyraz ciągu w przypadku następujących zależności rekurencyjnych, korzystając z obu metod dyskutowanych na wykładzie:

- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, dla $n \geq 2$, przy warunkach początkowych $f_0 = 1$, $f_1 = 1$.
- $f_n = -5f_{n-1} + 7f_{n-2} + 6f_{n-3}$, dla $n \geq 3$, przy warunkach początkowych $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_2 = 3$.

4. Zapisz w postaci diagonalnej formy kwadratowej:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{9}(x^2 + y^2 + 7z^2 + 16xy + 8xz - 8yz)$$

gdzie x, y, z to zmienne rzeczywiste.

$$h(z, w, u) = 3zz^* + 3ww^* + 4uu^* - iwz^* + izw^*$$

gdzie z, w, u to zmienne zespolone.

5. Oblicz: e^A , $\sin B$, \sqrt{C} , gdzie A , B i C to macierze z zadania 1.