

Zestaw 4 / Matematyczne Metody Fizyki I

1. Dane są dwa wektory $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ oraz $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$. Oblicz:

- kąt jaki tworzą te wektory,
- składową wektora \vec{a} równoległą i prostopadłą do wektora \vec{b} ,
- wektor o długości 5 prostopadły do wektorów \vec{a} i \vec{b} .

2. Cząstka porusza się w płaszczyźnie xy tak, że jej wektor położenia jest określony równaniem:

$$\vec{R} = r \cos(\omega t)\vec{i} + r \sin(\omega t)\vec{j} \quad (r, \omega = \text{const}, t - \text{czas})$$

Pokaż, że w tym ruchu:

- prędkość \vec{V} jest prostopadła do \vec{R} ,
- przyspieszenie jest skierowane do środka układu; znajdź jego wartość,
- moment pędu $\vec{L} = \vec{R} \times m\vec{V}$ jest wektorem stałym; znajdź jego długość.

3. Znajdź permutacje fg , gf , f^2 i f^{-1} jeśli znane są permutacje f i g :

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Określ parzystość permutacji f , g , fg , gf , f^2 i f^{-1} z poprzedniego zadania.

5. Wykaż, że: (a) $\sum_{k=1}^2 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{jk} = \delta_{ij}$; (b) $\sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$

6. W przestrzeni wektorowej R^3 określony jest iloczyn skalarny $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$ gdzie $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ oraz $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Przeprowadź ortonormalizację poniższej bazy metodą Grama-Schmidta,

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 0), \quad \vec{v}_2 = (1, 0, 1), \quad \vec{v}_3 = (0, 1, 1)$$

tak aby jeden z wektorów nowej bazy był równoległy do wektora v_1 .

7. W przestrzeni wektorowej C^3 określony jest iloczyn skalarny $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i^* y_i$ gdzie $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ oraz $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Przeprowadź ortonormalizację poniższej bazy metodą Grama-Schmidta,

$$\vec{v}_1 = (1, i, 0), \quad \vec{v}_2 = (0, 1, -i), \quad \vec{v}_3 = (i, 0, -1)$$

tak aby jeden z wektorów nowej bazy był równoległy do wektora v_1 .