Zestaw 6 / Matematyczne Metody Fizyki I

1. Przekonaj się, że równanie linii prostej na płaszczyźnie przechodzącej przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) można zapisać w postaci wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

W takim razie warunkiem koniecznym i wystarczającym na to aby trzy punkty (x_1, y_1), (x_2, y_2) i (x_3, y_3) leżały na jednej prostej jest

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Uzasadnij, że wartość powyższego wyznacznika w przypadku trzech punktów nie leżących na jednej prostej jest związana z polem trójkąta którego wierzchołkami są punkty (x_1, y_1), (x_2, y_2) i (x_3, y_3). Znajdź ten związek.

2. Oblicz wyznaczniki następujących macierzy stosując rozwinięcie Laplace'a. Postaraj się wstępnie przekształcić macierze do takiej postaci, aby pojawiło się możliwie dużo zer w pojedynczej kolumnie lub wierszu.

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2+3i & 2-2i & 1-i \\ 2+i & 7-3i & 3-i \\ 1+i & 4-6i & 2-3i \end{bmatrix}$$

3. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} z & 1 & z & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2z & 0 & z & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Rozwiąż w dziedzinie liczb zespolonych równanie $\det A = 4z^2$.

4. Oblicz wartość wyznacznika $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$ dla $\omega = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.