Matematyczne Metody Fizyki II

Mariusz Przybycień

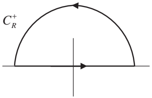
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 4

Rachunek residuów w obliczaniu całek

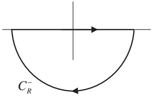
Wykorzystanie twierdzenia Cauchy'ego do obliczenia całki $I_x = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathrm{d}x$

Kontur domykamy od góry lub od dołu:



$$\oint_{C^\pm} F(z)\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R^\pm} F(z)\mathrm{d}z = \pm 2\pi i \sum a_{-1}(z_k)$$

Obliczamy całkę wzdłuż jednego z półokręgów:



$$z = R\mathrm{e}^{i\phi} \qquad \mathrm{d}z = iR\mathrm{e}^{i\phi}\mathrm{d}\phi$$

$$\int_{C_{+\infty}} F(z)\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R^+} F(z)\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} i\int_0^{\pi} RF(R\mathrm{e}^{i\phi})\mathrm{e}^{i\phi}\mathrm{d}\phi \sim \lim_{R\to\infty} RF(R)$$

$$\int_{C_{-\infty}} F(z)\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R^-} F(z)\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} i\int_{2\pi}^{\pi} RF(R\mathrm{e}^{i\phi})\mathrm{e}^{i\phi}\mathrm{d}\phi \sim \lim_{R\to\infty} RF(R)$$

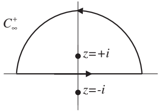
A więc jeśli $\lim_{R\to\infty} RF(R) = 0$ to

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{C_R^\pm} F(z)\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathrm{d}x = \pm 2\pi i \sum a_{-1}(z_\pm)$$

Obliczanie całek

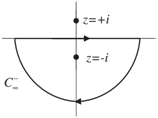
Przykład: Oblicz całkę $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ korzystając z twierdzenia Cauchy'ego.

Domykamy kontur w górnej (lub dolnej) półpłaszczyźnie:



$$\oint \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_{C_R^+} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$$

Całka po górnym półokręgu dla $R \to \infty$ znika:



$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^+} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = i \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{R} \mathrm{e}^{-i\phi} \mathrm{d}\phi = 0$$

(analogicznie można pokazać, że znika całka po dolnym półokręgu)

$$\oint \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \begin{cases} 2\pi i a_{-1}(+i) = 2\pi i \lim\limits_{z\to i} \left[(z-i)\frac{1}{(z-i)(z+i)}\right] = \pi \\ -2\pi i a_{-1}(-i) = 2\pi i \lim\limits_{z\to -i} \left[(z+i)\frac{1}{(z-i)(z+i)}\right] = \pi \end{cases}$$

Uwaga: Tą całkę można też obliczyć przez podstawienie $x = \mathrm{tg}\,\phi$:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sec^2\phi}{(1+\mathrm{tg}^2\,\phi)} \mathrm{d}\phi = \pi$$

Obliczanie całek typu Fouriera

Chcemy obliczyć całkę typu Fouriera: $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\pm ikx}\mathrm{d}x$, gdzie $k > 0$.

Aby skorzystać z tw. Cauchy'ego domykamy kontur w jednej z półpłaszczyzn (zależnie od znaku wykładnika: C_+ dla e^{ikz} oraz C_- dla e^{-ikz}):

$$\oint_{C_\pm} f(z)\mathrm{e}^{ikz}\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp^{ikx}\mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R^\pm} f(z)\mathrm{e}^{ikz}\mathrm{d}z$$

Opisując kontur przez $z = R\mathrm{e}^{i\phi} = R(\cos\phi + i\sin\phi)$ mamy

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_{C_R^\pm} f(z)\mathrm{e}^{ikz}\mathrm{d}z &= \lim_{R\to\infty}\int_{\phi_1}^{\phi_2} f\left(R\mathrm{e}^{i\phi}\right)\mathrm{e}^{ikR\cos\phi}\mathrm{e}^{-R\sin\phi} iR\mathrm{e}^{i\phi}\mathrm{d}\phi \\ &= i\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} Rf\left(R\mathrm{e}^{i\phi}\right)\mathrm{e}^{ikR\cos\phi}\mathrm{e}^{-kR|\sin\phi|}\mathrm{e}^{i\phi}\mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

Powyższa całka dąży do zera dla $R\to\infty$ gdy spełnione są warunki:

$$\lim_{R\to\infty} Rf(R)\mathrm{e}^{-kR|\sin\phi|} = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{R\to\infty} Rf(R) = 0$$

Dla całki zawierającej e^{-ikz} domykając kontur od dołu mamy:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R^-} f(z)\mathrm{e}^{-ikz}\mathrm{d}z = i\lim_{R\to\infty}\int_{2\pi}^{\pi} Rf\left(R\mathrm{e}^{i\phi}\right)\mathrm{e}^{ikR\cos\phi}\mathrm{e}^{-kR|\sin\phi|}\mathrm{e}^{i\phi}\mathrm{d}\phi = 0$$

Obliczanie całek typu Fouriera

Podsumowując, dla $k > 0$ całkę typu Fouriera można obliczyć korzystając z twierdzenia Cauchy'ego domykając kontur w górnej (e^{ikz}) lub dolnej (e^{-ikz}) półpłaszczyźnie:

$$\oint_{C_\pm} f(z)\mathrm{e}^{\pm ikz}\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\pm ikx}\mathrm{d}x = \pm 2\pi i \sum a_{-1}(z_\pm)$$

Przykład: Uzasadnij, że $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2ix}}{(1+x^2)}\mathrm{d}x = 2\pi i a_{-1}(+i) = \pi\mathrm{e}^{-2}$

Funkcja podcałkowa ma dwa bieguny $\pm i$. Domykamy kontur w górnej półpłaszczyźnie, a więc obejmuje on tylko jeden biegun $+i$.

Wyrażając eksponentę poprzez funkcje trygonometryczne oraz porównując częsci rzeczywiste i urojone:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2ix}}{(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{(1+x^2)}\mathrm{d}x + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{(1+x^2)}\mathrm{d}x = \pi\mathrm{e}^{-2}$$

widać, że:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{(1+x^2)}\mathrm{d}x = \pi\mathrm{e}^{-2} \qquad \text{oraz} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{(1+x^2)}\mathrm{d}x = 0$$

Całki postaci $I = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta) \mathrm{d}\theta$ obliczamy korzystając z tw. Cauchy'ego.

Stosujemy podstawienie $z = \mathrm{e}^{i\theta}$, $\mathrm{d}z = iz\mathrm{d}\theta$,

$$z = \mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{matrix}\right\} = \frac{z + \sigma^2 z^{-1}}{2\sigma} \quad \text{gdzie} \quad \sigma = \begin{cases} 1 \\ i \end{cases}$$

Ponieważ $|z| = |\mathrm{e}^{i\theta}| = 1$ oraz $\theta \in [0, 2\pi]$ więc konturem po którym przebiega całkowanie jest okrąg $|z| = 1$:

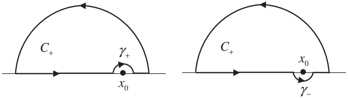
$$\int\limits_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta = \oint\limits_{|z|=1} f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{1}{iz}\mathrm{d}z = 2\pi i \sum a_{-1}\begin{pmatrix}\text{bieguny} \\ \text{wewnątrz} \\ |z| = 1\end{pmatrix}$$

Przykład: Oblicz całkę:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(10 + 6\sin\theta)} = \frac{1}{3}\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(z + \frac{i}{3})(z + 3i)} = 2\pi i a_{-1}(-i/3) = \frac{\pi}{4}$$

Wartość główna całki w sensie Cauchy'ego

Rozważmy całkę postaci $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x - x_0)} \mathrm{d}x$ gdzie funkcja $f(z)$ może mieć bieguny jedynie poza osią rzeczywistą.



Istnieją dwa sposoby ominięcia bieguna na osi rzeczywistej. Dla konturu γ_+:

$$\oint\limits_{C_+} \frac{f(z)}{(z - x_0)} \mathrm{d}z = \int\limits_{-\infty}^{x_0-\rho} \frac{f(x)}{(x - x_0)} \mathrm{d}x + \int\limits_{\gamma_+} \frac{f(z)}{(z - x_0)} \mathrm{d}z + \int\limits_{x_0+\rho}^{\infty} \frac{f(x)}{(x - x_0)} \mathrm{d}x = 2\pi i \sum a_{\text{-}1}(z_+)$$

gdzie $\sum a_{-1}(z_+)$ oznacza sumę residuów $f(z)$ w górnej półpłaszczyźnie oraz zakładamy, że całka po nieskończonym okręgu C_+ znika.

Dla punktów na γ_+ zachodzi $z = x_0 + \rho \mathrm{e}^{i\phi}$, więc:

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_+} \frac{f(z)}{(z - x_0)} \mathrm{d}z = \lim_{\rho \to 0} \int_{\pi}^{0} \frac{f(x_0 + \rho \mathrm{e}^{i\phi})}{\rho \mathrm{e}^{i\phi}} i\rho \mathrm{e}^{i\phi} \mathrm{d}\phi = \int_{\pi}^{0} f(x_0) i \mathrm{d}\phi = -i\pi f(x_0)$$

Wartość główna całki I w sensie Cauchy'ego jest zdefiniowana jako:

$$P\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x - x_0)} \mathrm{d}x \equiv \lim_{\rho \to 0} \left[\int\limits_{-\infty}^{x_0-\rho} \frac{f(x)}{(x - x_0)} \mathrm{d}x + \int\limits_{x_0+\rho}^{\infty} \frac{f(x)}{(x - x_0)} \mathrm{d}x \right] = 2\pi i \sum a_{\text{-}1}(z_+) + i\pi f(x_0)$$

Wartość główna całki w sensie Cauchy'ego

Całka po konturze C_+ jest więc równa:

$$\oint_{C_+} \frac{f(z)}{(z-x_0)}\mathrm{d}z = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x-x_0)}\mathrm{d}x - i\pi f(x_0) = 2\pi i \sum a_{\text{-}1}(z_+)$$

Wartość główna całki jednak nie zależy od wyboru konturu, γ_+ lub γ_-, wzdłuż którego omijamy osobliwość na osi x.

Dla punktów na γ_- zachodzi $z = x_0 + \rho \mathrm{e}^{i\phi}$, więc:

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_-} \frac{f(z)}{(z-x_0)}\mathrm{d}z = \lim_{\rho\to 0}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{f(x_0+\rho \mathrm{e}^{i\phi})}{\rho \mathrm{e}^{i\phi}} i\rho \mathrm{e}^{i\phi}\mathrm{d}\phi = \int_{\pi}^{2\pi} f(x_0) i\mathrm{d}\phi = i\pi f(x_0)$$

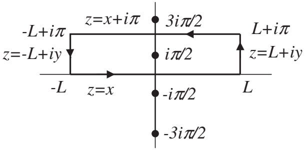
Domykając kontur C_+ w górnej półpłaszczyźnie tym razem obejmuje on osobliwość w x_0, więc:

$$\oint_{C_+} \frac{f(z)}{(z-x_0)}\mathrm{d}z = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x-x_0)}\mathrm{d}x + i\pi f(x_0) = 2\pi i f(x_0) + 2\pi i \sum a_{\text{-}1}(z_+)$$

Skąd otrzymujemy, że: $$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x-x_0)}\mathrm{d}x = 2\pi i \sum a_{\text{-}1}(z_+) + i\pi f(x_0)$$

Inne typy całek

Przykład: Oblicz całkę $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^x}{(1+e^{2x})^2} dx$



Rozważmy całkę $I = \oint_\Gamma \frac{ze^z}{(1+e^{2z})^2} dz$ oraz kontur w postaci prostokąta.

Funkcja podcałkowa ma bieguny drugiego rzędu w:

$$e^{2z} = -1 \quad \Rightarrow \quad z = \pm i\pi/2, \pm i3\pi/2, ... = \pm i(n + \frac{1}{2})\pi, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Rozważmy całkę po konturze prostokątnym dla $L \to \infty$:

$$\oint \frac{ze^z}{(1+e^{2z})^2} dz = \int_{-L}^{L} \frac{xe^x}{(1+e^{2x})^2} dx + \int_0^\pi \frac{(L+iy)e^{L+iy}}{\left(1+e^{2(L+iy)}\right)^2} i dy$$
$$+ \int_L^{-L} \frac{(x+i\pi)e^{(x+i\pi)}}{\left(1+e^{2(x+i\pi)}\right)^2} dx + \int_\pi^0 \frac{(-L+iy)e^{-L+iy}}{\left(1+e^{2(-L+iy)}\right)^2} i dy$$

Całki po pionowych krawędziach znikają dla $L \to \infty$, np.:

$$\lim_{L\to\infty} \frac{(L+iy)e^{L+iy}}{\left(1+e^{2(L+iy)}\right)^2} \sim e^{-3iy} \lim_{L\to\infty} (L+iy)e^{-3L} = 0$$

Inne typy całek

Dla $L \to \infty$ mamy (korzystamy z $\mathrm{e}^{(x+i\pi)} = -\mathrm{e}^{x}$ oraz $\mathrm{e}^{2(x+i\pi)} = \mathrm{e}^{2x}$):

$$\lim_{L\to\infty} \oint \frac{z\mathrm{e}^{z}}{\left(1+\mathrm{e}^{2z}\right)^{2}}\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\mathrm{e}^{x}}{\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)^{2}}\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+i\pi)\mathrm{e}^{x}}{\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)^{2}}\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\mathrm{e}^{x}}{\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)^{2}}\mathrm{d}x + i\pi\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)^{2}}\mathrm{d}x = 2\pi i a_{-1}\left(\frac{i\pi}{2}\right)$$

Stosując podstawienie $w = \mathrm{e}^{x}$ oraz tw. Cauchy'ego obliczamy całkę:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)^{2}}\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}w}{(1+w^2)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}w}{(1+w^2)^2} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \lim_{w\to i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\frac{1}{(w+i)^2} = \frac{\pi}{4}$$

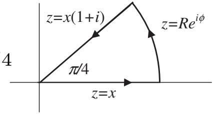
Obliczamy residuum $a_{-1}\left(\frac{i\pi}{2}\right) = \frac{\pi+2i}{8}$, i ostatecznie mamy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\mathrm{e}^{x}}{\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)^{2}}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}$$

Inne typy całek

Przykład: Aby obliczyć całkę $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ikx^2}\mathrm{d}x$ skorzystamy z całki $I = \oint \mathrm{e}^{ikz^2}\mathrm{d}z$ gdzie konturem Γ całkowania jest wycinek koła.

$$\Gamma: \quad z = x, \quad z = R\mathrm{e}^{i\phi},\ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4, \quad z = x(1+i) = x\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}$$



$$\lim_{R\to\infty} \oint \mathrm{e}^{ikz^2}\mathrm{d}z = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{ikx^2}\mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{ikR^2\mathrm{e}^{2i\phi}} iR\mathrm{e}^{i\phi}\mathrm{d}\phi + (1+i)\int_{\infty}^{0} \mathrm{e}^{-2kx^2}\mathrm{d}x$$

Ponieważ

$$\mathrm{e}^{ikR^2\mathrm{e}^{2i\phi}} = \mathrm{e}^{ikR^2\cos(2\phi)}\mathrm{e}^{-kR^2\sin(2\phi)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{R\to\infty} \mathrm{e}^{-kR^2\sin(2\phi)} = 0 \ \text{ dla } \ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4$$

$$-(1+i)\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2kx^2}\mathrm{d}x = -(1+i)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2k}} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{ikx^2}\mathrm{d}x = \frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2k}}$$

Zapisując eksponentę w postaci trygonometrycznej widać, że:

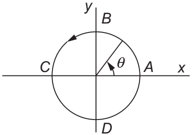
$$\int_0^{\infty} \cos(kx^2)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \sin(kx^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2k}}$$

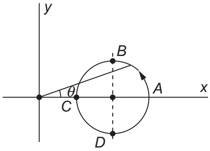
Funkcje wieloznaczne, punkty rozgałęzienia

Punkty rozgałęzienia to osobliwości funkcji zespolonych związane z ich wieloznacznością.

Przykład: Rozważmy zachowanie funkcji $f(z) = \sqrt{z}$ wzdłuż następujących dwóch okręgów obieganych *pdrwz*:

$f(z_A) = 1$
$f(z_B) = e^{i\pi/4}$
$f(z_C) = e^{i\pi/2}$
$f(z_D) = e^{3i\pi/4}$
$f(z_A) = e^{i\pi} = -1$
.....
$f(z_A) = 1$





$f(z_A) = \sqrt{3}$
$f(z_B) = \sqrt[4]{5}e^{i\phi_B/2}$
$f(z_C) = 1$
$f(z_D) = \sqrt[4]{5}e^{-i\phi_B/2}$
$f(z_A) = \sqrt{3}$

Funkcja $f(z) = \sqrt{z}$ nie posiada w $z = 0$ pochodnej co oznacza jej niejednoznaczność wzdłuż dowolnej drogi okrążającej taki punkt.

Rzędem punktu rozgałęzienia nazywamy liczbę owinięć konturu wokół tego punktu potrzebnych aby wartość funkcji wróciła do wartości początkowej.

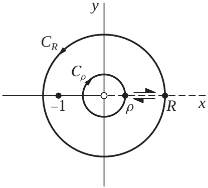
Funkcja $f(z) = \sqrt{z}$ jest funkcją dwuwartościową.

Przykład: Funkcja $\ln z = \ln r + i\theta$ jest funkcją nieskończenie wieloznaczną.

Linie rozgałęzienia

Przykład: Oblicz całkę $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$, wykorzystując funkcję wieloznaczną.

Potrzebujemy funkcji, która ma:
(1) punkt rozgałęzienia w $z=0$,
(2) linię rozgałęzienia którą można rozciągnąć do ∞ wzdłuż osi x,
(3) oraz której wartość po przekroczeniu linii rozgałęzienia zmienia się o stałą wielokrotność $1/(1+x^3)$.



Taką funkcją jest $F(z)=\frac{\ln z}{1+z^3}$

Z twierdzenia Cauchy'ego mamy: $\oint \frac{\ln z}{1+z^3}\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{3} a_{-1}(z_k) =$

$$= \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^3}\mathrm{d}x + \int_{C_\infty} \frac{\ln z}{1+z^3}\mathrm{d}z + \int_\infty^0 \frac{\ln x + 2\pi i}{1+x^3}\mathrm{d}x + \int_{C_0} \frac{\ln z}{1+z^3}\mathrm{d}z$$

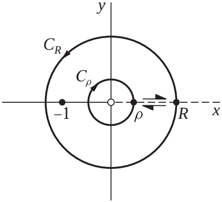
Całki po konturach C_ρ oraz C_R dążą do zera gdy $\rho\to 0$ oraz $R\to\infty$:

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} F(z)\mathrm{d}z = \lim_{\rho\to 0} i\rho\ln\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i\phi}\mathrm{d}\phi = 0 \qquad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F(z)\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} i\frac{\ln R}{R^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i\phi}\mathrm{d}\phi = 0$$

A więc ostatecznie mamy $(a_{-1}(z_k) = P(z_k)/Q'(z_k) = \ln(z_k)/(3z_k^2))$:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = -\left[a_{-1}(\mathrm{e}^{i\pi/3}) + a_{-1}(\mathrm{e}^{i\pi}) + a_{-1}(\mathrm{e}^{i5\pi/3})\right] = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Całkowanie wzdłuż linii rozgałęzienia



Przykład: Oblicz całkę $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1}\mathrm{d}x, \quad 0 < a < 1$

Obliczymy całkę z funkcji ($z = r\mathrm{e}^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad \ln z = \ln r + i\theta$):

$$f(z) = \frac{z^{-a}}{z+1} = \frac{\exp\left(-a\ln z\right)}{z+1}, \quad |z| > 0, \; 0 < \arg z < 2\pi$$

Z twierdzenia Cauchy'ego mamy (wybieramy $\rho < 1 < R$):

$$\int_\rho^R \frac{r^{-a}}{r+1}\mathrm{d}r + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z - \int_\rho^R \frac{r^{-a}\mathrm{e}^{-i2a\pi}}{r+1}\mathrm{d}r + \int_{C_\rho} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)$$

Obliczamy residuum: $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to-1}\,(z+1)f(z) = \mathrm{e}^{[-a(\ln 1 + i\pi)]} = \mathrm{e}^{-i\pi a}$

Całki po konturach C_ρ oraz C_R dążą do zera gdy $\rho \to 0$ oraz $R \to \infty$:

$$\left|\int_{C_\rho} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\rho^{-a}}{1-\rho}\,2\pi\rho = \frac{2\pi}{1-\rho}\rho^{1-a} \qquad \left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{R^{-a}}{R-1}\,2\pi R = \frac{2\pi R}{R-1}\frac{1}{R^a}$$

A więc ostatecznie mamy:

$$(1 - \mathrm{e}^{-i2\pi a})\int_0^\infty \frac{r^{-a}}{r+1}\mathrm{d}r = 2\pi i\mathrm{e}^{-i\pi a} \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty \frac{r^{-a}}{r+1}\mathrm{d}r = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$