Matematyczne Metody Fizyki II

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 6

Reprezentacja całkowa Fouriera

Wstawiając współczynniki rozwinięcia w szereg Fouriera do reprezentacji funkcji dostajemy:

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(u)\cos\frac{n\pi(u-x)}{L}\,\mathrm{d}u$$

Zakładając, że $\lim\limits_{L\to\infty}\int\limits_{-L}^{L} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$, pierwszy wyraz w powyższym rozwinięciu dąży do zera dla $L \to \infty$.

Oznaczając przez $\Delta_n\omega = \pi/L$ oraz $\omega_n = n\pi/L$ mamy:

$$f(x) = \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(u)\cos\frac{n\pi(u-x)}{L}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_n\omega\int_{-L}^{L} f(u)\cos\left[\omega_n(u-x)\right]\mathrm{d}u$$

Korzystając z definicji całki oznaczonej oraz wykonując przejście graniczne $L \to \infty$ otrzymujemy reprezentację całkową Fouriera funkcji $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\omega(u-x)\mathrm{d}u = \int_{0}^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x]\mathrm{d}\omega$$

gdzie $$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\omega u\,\mathrm{d}u \qquad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin\omega u\,\mathrm{d}u$$

Reprezentacja całkowa Fouriera

Twierdzenie całkowe Fouriera: Niech $f(x)$ spełnia warunki Dirichleta (skończona liczba maksimów i minimów oraz ograniczonych nieciągłości na każdym skończonym przedziale) oraz będzie całkowalna na przedziale $-\infty < x < \infty$ tzn. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \mathrm{d}x < \infty$ oraz $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{d}x < \infty$. Wówczas mamy:

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \int_0^\infty [A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x]\mathrm{d}\omega$$

Przykład: Znajdź reprezentację całkową Fouriera funkcji $f(x) = e^{-|x|}$

Spełnione są warunki Dirichleta, a funkcja jest całkowalna bo $\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-|x|}| \mathrm{d}x = 2$.

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|u|}\cos\omega u\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}\cos\omega u\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi(1+\omega^2)}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|u|}\sin\omega u\,\mathrm{d}u = 0$$

$$e^{-|x|} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{1+\omega^2}\mathrm{d}\omega$$

Transformata Fouriera

Postać zespolona reprezentacji całkowej Fouriera funkcji $f(x)$ w $(-\infty, \infty)$:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \mathrm{d}\omega \int\limits_{-\infty}^\infty f(u) \cos\omega(u-x)\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty \mathrm{d}\omega \int\limits_{-\infty}^\infty f(u) \cos\omega(x-u)\mathrm{d}u$$

Ponieważ $0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty \mathrm{d}\omega \int\limits_{-\infty}^\infty f(u) \sin\omega(x-u)\mathrm{d}u$, więc dodając to wyrażenie pomnożone przez i do powyższej reprezentacji całkowej, otrzymujemy

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty \left[\int\limits_{-\infty}^\infty f(u) \exp\{i\omega(x-u)\}\mathrm{d}u \right] \mathrm{d}\omega$$

Przepisując reprezentację całkową Fouriera w postaci

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^\infty \exp\{i\omega x\} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^\infty f(u) \exp\{-i\omega u\}\mathrm{d}u \right] \mathrm{d}\omega$$

oraz definiując transformatę Fouriera jako

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) \exp\{-i\omega x\}\mathrm{d}x$$

otrzymujemy $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty F(\omega) \exp\{i\omega x\}\mathrm{d}\omega$

Własności transformaty Fouriera

- Liniowość $\mathcal{F}\{af(x)+bg(x)\} = a\mathcal{F}\{f(x)\} + b\mathcal{F}\{g(x)\}$
- Niech $f(x)$ będzie funkcją ciągłą i taką że $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, której pochodna $f'(x)$ jest całkowalna na moduł na przedziale $(-\infty,\infty)$, wtedy:

- $$\mathcal{F}\{f'(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(x)e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega)\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x\right] = i\omega F(\omega)$$
- dla wszystkich n dla których pochodne $f^{(r)}(x)$, $r=1,2,...,n$ spełniają warunki Dirichleta, są całkowalne bezwzględnie na przedziale $(-\infty,\infty)$ oraz $\lim_{|x|\to\infty} f^{(n-1)}(x) = 0$, zachodzi $\mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\} = (i\omega)^n F(\omega)$

- Niech $f(x)$ będzie ciągłą i różniczkowalną funkcją posiadającą n-krotnie różniczkowalną transformatę Fouriera:

- $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[F(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x = -i\mathcal{F}\{xf(x)\}$$
- $\mathcal{F}\{x^n f(x)]\} = i^n \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n}[F(\omega)]$
- $\mathcal{F}\{x^m f^{(n)}(x)\} = i^{m+n}\dfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\omega^m}[\omega^m F(\omega)]$

Transformata Fouriera - przykłady

Przykład: Znajdź transformatę Fouriera funkcji $f(x) = 1, \; |x| < a$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-i\omega x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\omega\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}}{i} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega a}{\omega}$$

Przykład: Znajdź transformatę Fouriera funkcji $f(x) = 1, \; 0 < x < a$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{a} e^{-i\omega x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1 - e^{-i\omega a}}{i\omega} \right)$$

Przykład: Znajdź transformatę Fouriera funkcji $f(x) = e^{iax}, \; 0 < x < 1$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} e^{-i(\omega - a)x} \mathrm{d}x = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1 - e^{-i(\omega - a)}}{a - \omega} \right)$$

Przykład: Znajdź transformatę Fouriera funkcji $f(x) = e^{-a^2 x^2}, \; a > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\exp(-a^2 x^2)| \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 x^2) \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

$$f' + 2a^2 x f = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\{f'(x)\} + 2a^2 \mathcal{F}\{x f(x)\} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a^2 F' + \omega F = 0$$

$$F(\omega) = A \exp\left[-\frac{\omega^2}{4a^2} \right] \quad \text{gdzie} \quad A = F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 x^2) \mathrm{d}x = \frac{1}{a\sqrt{2}}$$

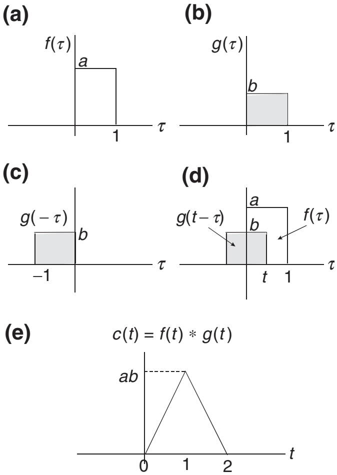
$$\mathcal{F}\{\exp(-a^2 x^2)\} = F(\omega) = \frac{1}{a\sqrt{2}} \exp\left\{ -\frac{\omega^2}{4a^2} \right\}, \; a > 0$$

Splot (konwolucja) funkcji

Definicja: Splotem (konwolucją) funkcji $f(\tau)$ i $g(\tau)$ nazywamy:

$$c(t) \equiv (f * g)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Przykład: Splot funkcji $f(\tau)$ i $g(\tau)$ przedstawionych na rysunku.



- Rysujemy $g(-\tau)$, a następnie przesuwamy o t, otrzymując $g(t-\tau)$.

Dla $t < 0$ lub $t > 2$ funkcje $f(\tau)$ i $g(t-\tau)$ nie przekrywają się, czyli dla dowolnego τ jedna z nich lub obie są równe zero. Oznacza to, że również $f(\tau)g(t-\tau) = 0$.

- Mnożymy funkcję $g(t-\tau)$ przez $f(\tau)$.
- Pole powierzchni pod iloczynem $f(\tau)g(t-\tau)$ jest wartością konwolucji dla danego t.

Dla $0 < t \leqslant 1$ mamy: $c(t) = abt$

Dla $1 \leqslant t < 2$ mamy:
$c(t) = ab[1-(t-1)] = ab(2-t)$

Własności transformaty Fouriera

Definicja: Splotem (konwolucją) funkcji $f(x)$ i $g(x)$ nazywamy (unormowane):

$$(f*g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Twierdzenie o splocie (konwolucji) dla transformat Fouriera: Niech funkcje $f(x)$ i $g(x)$ będą przedziałami ciągłe, ograniczone i całkowalne na moduł w $(-\infty,\infty)$ oraz posiadają transformaty Fouriera $F(\omega)$ i $G(\omega)$. Wówczas mamy:

- $\mathcal{F}\{(f*g)(x)\}=\mathcal{F}\{f(x)\}\mathcal{F}\{g(x)\}=F(\omega)G(\omega)$

$$\mathcal{F}\{(f*g)(x)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)\mathrm{d}t\right]e^{-i\omega x}\mathrm{d}x=\Big\{\,v=x-t\,\Big\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}g(v)e^{-i\omega v}\mathrm{d}v=\mathcal{F}\{f(x)\}\mathcal{F}\{g(x)\}$$

- $(f*g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)G(\omega)e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega$

Twierdzenie: Relacja Parsevala: $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t=\left\{\begin{matrix}x=0\\ g(t)=f^\star(-t)\end{matrix}\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)F^\star(\omega)\,\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$$

Własności transformaty Fouriera

Przykład: Wiedząc, że dla $f(x) = 1,\ |x| < a$ mamy $F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin \omega a}{\omega}\right)$,

oblicz całkę $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega a}{\omega^2} \mathrm{d}\omega \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{-a}^{a} 1^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega a}{\omega^2} \mathrm{d}\omega \quad \Rightarrow \quad I = \pi a$

Jeśli $F(\omega)$ jest transformatą Fouriera funkcji $f(x)$, wówczas mamy:

- $\mathcal{F}\{f(ax)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-i\omega x} \mathrm{d}x = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u/a} \mathrm{d}u = \frac{1}{a} F(\omega/a)$
- $\mathcal{F}\{f(x-a)\} = e^{-i\omega a} F(\omega)$
- $\mathcal{F}\{e^{i\lambda x} f(x)\} = F(\omega - \lambda)$

Transformata Fouriera funkcji $\delta(x-a)$ Diraca:

$$\mathcal{F}\{\delta(x-a)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) e^{-i\omega x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega a}$$

Przykład: Transformata Fouriera funkcji $f(x) = \delta(x-a) \exp\left[-b^2 x^2\right]$

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) \exp\left[-b^2 x^2\right] e^{-i\omega x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(a^2 b^2 + i\omega a)\right]$$

Transformata Fouriera funkcji dwóch zmiennych $f(x,t)$:

$${}_x\mathcal{F}\{f(x,t)\} = F(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t) e^{-i\omega x} \mathrm{d}x$$

$$f(x,t) = {}_x\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega,t) e^{i\omega x} \mathrm{d}\omega$$

Cosinusowa i sinusowa transformata Fouriera

Jeśli funkcja $f(x)$ ma określoną parzystość, wtedy transformata Fouriera:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)[\cos\omega x - i \sin\omega x] \mathrm{d}x$$

przyjmuje postać transformaty cosinusowej dla funkcji parzystej $f(x) = f(-x)$:

$$F_C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos\omega x \, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} f(x) \cos\omega x \, \mathrm{d}x$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} F_C(\omega) \cos\omega x \, \mathrm{d}\omega$$

oraz transformaty sinusowej dla funkcji nieparzystej $f(x) = -f(-x)$:

$$F_S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin\omega x \, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} f(x) \sin\omega x \, \mathrm{d}x$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} F_C(\omega) \sin\omega x \, \mathrm{d}\omega$$

Przykład: Znajdź transformaty sinusową i cosinusową funkcji $f(x) = e^{-ax}$:

$$\mathcal{F}_C\{e^{-ax}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos\omega x \, \mathrm{d}x = \Re\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{i\omega x} \mathrm{d}x\right]\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{a}{\omega^2 + a^2}\right)$$

$$\mathcal{F}_S\{e^{-ax}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin\omega x \, \mathrm{d}x = \Im\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{i\omega x} \mathrm{d}x\right]\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\omega}{\omega^2 + a^2}\right)$$

Cosinusowa i sinusowa transformata Fouriera

- Transformaty Fouriera cosinusowa i sinusowa są liniowe:

$$\mathcal{F}_C\{af(x)+bg(x)\} = a\mathcal{F}_C\{f(x)\} + b\mathcal{F}_C\{g(x)\} = aF_C(\omega) + bG_C(\omega)$$
$$\mathcal{F}_S\{af(x)+bg(x)\} = a\mathcal{F}_S\{f(x)\} + b\mathcal{F}_S\{g(x)\} = aF_S(\omega) + bG_S(\omega)$$

- Niech $f(x)$ będzie ciągła i całkowalna na przedziale $\langle 0, \infty)$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Wówczas:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_C\{f'(x)\} &= \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty f'(x)\cos\omega x \,\mathrm{d}x = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \left[f(x)\cos\omega x\Big|_0^\infty + \omega \int\limits_0^\infty f(x)\sin\omega x\,\mathrm{d}x \right] \\
&= -\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} f(0) + \omega\mathcal{F}_S\{f(x)\} \\
\mathcal{F}_S\{f'(x)\} &= -\omega\mathcal{F}_C\{f(x)\} \\
\mathcal{F}_C\{f''(x)\} &= -\sqrt{\tfrac{2}{\pi}} f'(0) - \omega^2\mathcal{F}_C\{f(x)\} \\
\mathcal{F}_S\{f''(x)\} &= \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} f'(0) - \omega^2\mathcal{F}_S\{f(x)\}
\end{aligned}$$

- Relacje Parsevala dla transformat Fouriera cosinusowej i sinusowej:

$$\int\limits_0^\infty |F_C(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega = \int\limits_0^\infty |f(x)|^2 \mathrm{d}x, \qquad \int\limits_0^\infty |F_S(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega = \int\limits_0^\infty |f(x)|^2 \mathrm{d}x$$
$$\int\limits_0^\infty F_C(\omega)G_C(\omega)\mathrm{d}\omega = \int\limits_0^\infty f(v)g(v)\mathrm{d}v$$

Cosinusowa i sinusowa transformata Fouriera

- Transformaty Fouriera dla zmiennych przesuniętych i skalowanych:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}_C\{\cos(ax)f(x)\} = \tfrac{1}{2}\{F_C(\omega+a)+F_C(\omega-a)\}\\
&\mathcal{F}_C\{\sin(ax)f(x)\} = \tfrac{1}{2}\{F_S(\omega+a)+F_S(\omega-a)\}\\
&\mathcal{F}_S\{\cos(ax)f(x)\} = \tfrac{1}{2}\{F_S(\omega+a)+F_S(\omega-a)\}\\
&\mathcal{F}_S\{\sin(ax)f(x)\} = \tfrac{1}{2}\{F_C(\omega-a)-F_C(\omega+a)\}\\
&\mathcal{F}_C\{f(ax)\} = \tfrac{1}{a}F_C(\omega/a), \quad a>0\\
&\mathcal{F}_S\{f(ax)\} = \tfrac{1}{a}F_S(\omega/a), \quad a>0
\end{aligned}
$$

- Transformaty Fouriera dla pochodnych cząstkowych funkcji $f(x,t)$:

$$
\begin{aligned}
&{}_x\mathcal{F}_C\{f'(x,t)\} = \omega F_S(\omega,t) - \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}f(0,t)\\
&{}_x\mathcal{F}_S\{f'(x,t)\} = -\omega F_C(\omega,t)\\
&{}_x\mathcal{F}_C\{f''(x,t)\} = -\omega^2 F_S(\omega,t) - \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}f'(0,t)\\
&{}_x\mathcal{F}_S\{f''(x,t)\} = -\omega^2 F_S(\omega,t) + \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}f'(0,t)
\end{aligned}
$$

Rozwiązywanie równań różniczkowych

Przykład: Rozwiąż równanie różniczkowe $\quad y''(t) - a^2 y(t) = f(t)$
wiedząc, że funkcje $y(t)$ oraz $f(t)$ znikają dla $t \to \pm\infty$ (aby istniały ich FT).

Stosujemy transformatę Fouriera do obu stron równania:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{F}\{y''(t)\} = (i\omega)^2 \mathcal{F}\{y(t)\} = -\omega^2 Y(\omega) \\ -(\omega^2 + a^2) Y(\omega) = F(\omega) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad Y(\omega) = -\frac{1}{(\omega^2 + a^2)} F(\omega)$$

Ponieważ $\quad \mathcal{F}\left\{e^{-a|t|}\right\} = \dfrac{2a}{\omega^2 + a^2} \quad$ stąd $\quad -\dfrac{1}{(\omega^2 + a^2)} = \mathcal{F}\left\{-\dfrac{1}{2a} e^{-a|t|}\right\}$

Niech $\quad G(\omega) \equiv -\dfrac{1}{\omega^2 + a^2} \quad$ wtedy $\quad g(t) \equiv -\dfrac{1}{2a} e^{-a|t|}$

Stosując twierdzenie o konwolucji dla FT mamy:

$$Y(\omega) = G(\omega) F(\omega) = \mathcal{F}\{g(t) * f(t)\}$$

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{g(t) * f(t)\} = g(t) * f(t)$$

Czyli szczególne rozwiązanie naszego równania różniczkowego ma postać:

$$y(t) = -\frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t-\tau|} f(\tau) \mathrm{d}\tau$$