Matematyczne Metody Fizyki II

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 8

Ortonormalne układy funkcji

Definicja: Niech $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ...$ będzie nieskończonym ciągiem funkcji określonych na przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ na którym zdefiniwana jest także funkcja $r(x) > 0$. Funkcje $\varphi(x)$ nazywamy ortogonalnymi ze względu na funkcję wagową $r(x)$ jeśli:

$$\int_a^b r(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \text{dla} \;\; m \neq n$$

Normą funkcji nazywamy $||\varphi(x)||$ gdzie $||\varphi_n(x)||^2 = \int_a^b r(x)\varphi_n^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$
Układ znormalizowanych funkcji $\hat{\varphi}_i(x) = \varphi_i(x)/||\varphi_i(x)||, \;\; i = 1, 2, ...$
nazywamy układem ortonormalnym:

$$\int_a^b r(x)\hat{\varphi}_m(x)\hat{\varphi}_n(x)\mathrm{d}x = \delta_{mn}$$

Przykład: Pokaż, że układ funkcji $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ...$ jest układem ortogonalnym na przedziale $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ ze względu na f. wagową $r(x) = 1$.

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \mathrm{d}x = 0$

$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \, \mathrm{d}x = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \mathrm{d}x = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin mx \mathrm{d}x = 0$

Układ ortonormalny ma postać: $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \;\; \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \;\; \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \;\; n = 1, 2, ...$

Wielomiany Legendre'a

Układ monomianów $x^n, \;\; n \geqslant 0$ napina przestrzeń wszystkich wielomianów. Nie jest to jednak układ ortogonalny.
Konstrukcja ortonormalnego układu wielomianów na przedziale $[-1,1]$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) \mathrm{d}x = 0 \quad \text{dla} \;\; n \neq m$$

ortogonalność: $\int\limits_{-1}^{1} P_n(x) x^m \mathrm{d}x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1-(-1)^{m+k+1}}{m+k+1} a_k = 0 \quad \text{dla} \;\; 0 \leqslant m < n$

normalizacja: $P_n(1) = a_0 + a_1 + ... + a_n = 1$

Otrzymujemy w ten sposób ortogonalne wielomiany Legendre'a:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), ...$$

Formuła Rodriguesa:
korzystamy z reguły Leibniza $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n (x^2-1)^n}{\mathrm{d}x^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k} (x+1)^k$$

Iloczyn skalarny wielomianów Legendre'a: $\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) \mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$

Wielomiany Legendre'a - funkcja generująca

Współczynniki $p_n(x)$ w rozwinięciu funkcji:

$$g(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) t^n, \quad \text{gdzie} \;\; p_n(x) = \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\right)\bigg|_{t=0}$$

są wielomianami w zmiennej x. Pokażemy, że są to wielomiany Legendre'a.

Ponieważ

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2xt+t^2}\sqrt{1-2xv+v^2}} = \frac{1}{\sqrt{tv}} \ln \frac{1+\sqrt{tv}}{1-\sqrt{tv}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1}(tv)^k$$

oraz $\displaystyle \int_{-1}^{1} g(t,x) g(v,x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \sum_{n,m=0}^{\infty} p_n(x) p_m(x) t^n v^m \mathrm{d}x$

więc porównując współczynniki przy tych samych potęgach $t^n v^m$ widać, że:

$$\int_{-1}^{1} p_n(x) p_m(x) \mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

Równocześnie mamy:

$$g(t, x=1) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(1) t^n \quad \Rightarrow \quad p_n(1) = 1$$

Funkcja $g(t,x)$ jest więc funkcją generującą dla wielomianów Legendre'a.

Wielomiany Legendre'a - relacje rekurencyjne

- $P_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}[(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)]$

Dowód przez porównanie współczynników przy tych samych potęgach t^n:

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial t} = \frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}$$

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} = (x-t)g(t,x) = (x-t)\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)t^n$$

- $P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) = 2xP'_n(x) + P_n(x)$

Dowód przez porównanie współczynników przy tych samych potęgach t^n:

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial x} = \frac{t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^n$$

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} P'_n(x)t^n = t\,g(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1}$$

- $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$

Dowód poprzez kombinację dwóch poprzednich formuł.

Inne wielomiany ortogonalne

Formuła Rodriguesa pozwala generować inne rodziny wielomianów ortogonalnych na przedziale $[a, b]$ z funkcją wagową $w(x)$:

$$R_n(x) = \frac{c_n}{w(x)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} [w(x) Q^n(x)] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b R_n(x) R_m(x) w(x) \mathrm{d}x = N_n \delta_{nm}$$

przy założeniu, że $w(a)Q_n(a) = w(b)Q_n(b) = 0.$

- Wielomiany Hermite'a: $Q(x) = 1, \;\; w(x) = e^{-x^2}, \quad D \equiv \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2} = e^{x^2/2} \left(x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right)^n e^{-x^2/2} = 2^n e^{-D^2/4} x^n$$

Ortogonalne na osi rzeczywistej: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} 2^n n! \, \delta_{nm}$

Funkcja generująca oraz spełniane równanie różniczkowe:

$$e^{2xy - y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{y^n}{n!}, \qquad y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

Przykład zastosowania: n-ty stan wzbudzony oscylatora harmonicznego jest proporcjonalny do $H_n(x)$, gdzie $x = \sqrt{m\omega/\hbar}\, q$ oznacza bezwymiarowe położenie.

- Wielomiany Laguerre'a: $Q(x) = x, \;\; w(x) = x^\alpha e^{-x}$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x}{n! x^\alpha} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(e^{-x} x^{n+\alpha} \right)$$

Ortogonalne na przedziale $[0, \infty)$:

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} \mathrm{d}x = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \delta_{nm}$$

Funkcja generująca oraz spełniane równanie różniczkowe:

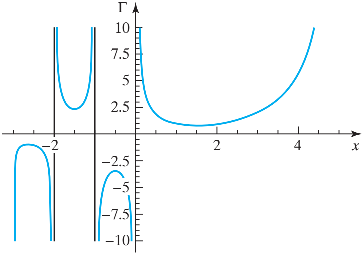
$$(1-y)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{xy}{y-1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) y^n, \qquad xy'' + (\alpha+1-x)y' + ny = 0$$

Przykład zastosowania: Część radialna funkcji falowej dla nierelatywistycznego atomu wodoru o liczbach kwantowych n i ℓ dana jest przez $\rho^\ell L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(\rho) e^{-\rho/2}$, gdzie $\rho = 2r/na_0$ oraz a_0 jest promieniem Bohra $a_0 = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / m_e e^2$.

Funkcja gamma Γ

Definicja: Funkcja gamma zdefiniowana jest jako:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t, \quad x > 0$$



Ponieważ spełniona jest relacja:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0$$

dlatego dla $x = n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\Gamma(n+1) = n!$

Dla $x > 0$ funkcja gamma interpoluje pomiędzy kolejnymi wartościami funkcji silnia i może być traktowana jako uogólnienie silni.

Funkcja gamma może być rozszerzona na obszar $x < 0$, $x \neq -1, -2, \ldots$

Przykład: Oblicz $\Gamma(1/2), \Gamma(7/2)$ oraz $\Gamma(-3/2)$

$$[\Gamma(1/2)]^2 = \left(\int_0^\infty e^{-u} u^{-1/2} \mathrm{d}u\right)\left(\int_0^\infty e^{-v} v^{-1/2} \mathrm{d}v\right) = \left\{ u = x^2,\ v = y^2 \right\} =$$

$$= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4 \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^\infty e^{-r^2} r\mathrm{d}r = \pi$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\tfrac{7}{2}\right) = \tfrac{5}{2}\Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) = \tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

$$\left(-\tfrac{3}{2}\right)\Gamma\left(-\tfrac{3}{2}\right) = \Gamma\left(-\tfrac{1}{2}\right), \quad \left(-\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Rightarrow \quad \Gamma\left(-\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

Zastosowania funkcji gamma Γ

Uogólnienie symbolu Newtona: $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n-m+1)}$

Dla $\mathbb{R} \ni \alpha > 0$ mamy: $\binom{\alpha}{m} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha-m+1)}$

Z relacji $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ wynika, że: $a(a+1)(a+2)...(a+n) = \frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(a)}$

Przykład: Zapisz współczynnik $a_n = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot ... \cdot (4n+1)}{2^n}$ za pomocą funkcji Γ.

$$1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot ... \cdot (4n+1) = 4^{n+1} \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{9}{4} \cdot ... \cdot (\tfrac{1}{4}+n) = 4^{n+1} \frac{\Gamma(\frac{5}{4}+n)}{\Gamma(\frac{1}{4})} \quad \Rightarrow \quad a_n = 2^{n+2} \frac{\Gamma(\frac{5}{4}+n)}{\Gamma(\frac{1}{4})}$$

Podwójna silnia:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n+1) = (2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}, \qquad 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n) = (2n)!! = 2^n n!$$

Definicja: Funkcja beta: $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \mathrm{d}t, \quad x > 0, y > 0$

Własności:

$$B(x,y) = B(y,x), \quad B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad B(1,1) = 1, \quad B(1/2,1/2) = \pi$$

$$B(x,y) = \left(\frac{y-1}{x+y-1}\right) B(x,y-1) = \left(\frac{x+y}{y}\right) B(x,y+1)$$

Funkcja Bessela pierwszego rodzaju $J_n(x)$

Rozwiązując równanie Bessela $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-\nu^2)y=0$

metodą Frobeniusa $y(x)=\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{r+c}$, otrzymujemy:

równanie charakterystyczne: $c^2-\nu^2=0 \quad\Rightarrow\quad c_1=\nu,\ c_2=-\nu$

Przyrównując współczynniki kolejnych potęg x do zera, mamy:

$$\begin{array}{lll} x^c: & (c^2-\nu^2)a_0=0 & \Rightarrow\quad a_0\neq 0 \\ x^{c+1}: & [(c+1)^2-\nu^2]a_1=0 & \Rightarrow\quad a_1=0 \\ x^{c+r}: & [(r+c)^2-\nu^2]a_r+a_{r-2}=0 & \Rightarrow\quad a_{2m}=-\frac{1}{4m(m+\nu)}a_{2m-2},\quad m=1,2,.. \end{array}$$

Wybieramy $a_0=\frac{1}{2^\nu\Gamma(1+\nu)} \quad\Rightarrow\quad a_{2m}=-\frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(m+1+\nu)},\quad m=1,2,...$

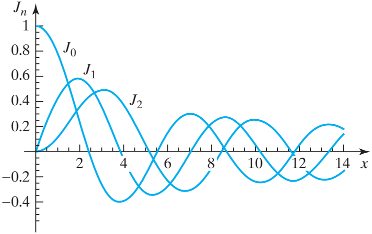
Pierwsze rozwiązanie metodą Frobeniusa przymuje postać funkcji $J_\nu(x)$.

Funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu ν:

$$J_\nu(x)=x^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(m+1+\nu)},\quad x\geqslant 0$$

Dla $\nu=n\in\mathbb{N}$ mamy:

$$J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+n}}{2^{2m+n}m!(m+n)!},\quad x\geqslant 0$$



Funkcja Bessela pierwszego rodzaju $J_n(x)$

W przypadku gdy ν nie jest liczbą całkowitą, drugie, liniowo niezależne rozwiązanie równania Bessela ma postać:

$$J_{-\nu}(x) = |x|^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-\nu} m! \Gamma(m+1-\nu)}, \quad x \neq 0$$

Ogólne rozwiązanie ma więc postać: $y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$

Własności funkcji Bessela dla $\nu = n \in \mathbb{N}$:

- Funkcje $J_n(x)$ i $J_{-n}(x)$ są liniowo zależne (przesuwamy indeks $m - n = k$):
  $J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-n}}{2^{2m-n} m!(m-n)!} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+n}}{2^{2k+n} k!(k+n)!} = (-1)^n J_n(x)$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu-1}(x)$
- $J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x), \qquad J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x)$
- $\int x^\nu J_{\nu-1}(x)\mathrm{d}x = x^\nu J_\nu(x) + C, \qquad \int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\mathrm{d}x = -x^{-\nu} J_\nu(x) + C$

Przykład: Oblicz całkę: $\int \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) J_1(x)\mathrm{d}x = \int x^2 J_1(x)\mathrm{d}x + \int x^{-1} J_1(x)\mathrm{d}x$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^2 J_2(x)] = x^2 J_1(x) \quad \Rightarrow \quad \int x^2 J_1(x)\mathrm{d}x = x^2 J_2(x) + C$

$\int x^{-1} J_1(x)\mathrm{d}x = \int x^{-2}[x J_1(x)]\mathrm{d}x = \left\{ [x J_1(x)]' = x J_0(x) \right\} = -J_1(x) + \int J_0(x)\mathrm{d}x$

Całki oznaczone $\int J_0(x)\mathrm{d}x$ są dostępne w tablicach (uwaga: $\int_0^\infty J_n(x)\mathrm{d}x = 1$).

Funkcja Bessela pierwszego rodzaju $J_{\pm n/2}(x)$

Sprowadzamy równanie Bessela $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ do postaci standardowej stosując podstawienie $u = x^{1/2}y$:

$$u'' + \left(1 - \frac{4\nu^2 - 1}{4x^2}\right)u = 0 \quad \overset{\nu=\pm 1/2}{\Rightarrow} \quad u'' + u = 0$$

Rozwiązanie ogólne ma postać:

$$u(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x \quad \Rightarrow \quad y(x) = C_1\sqrt{\frac{1}{x}}\sin x + C_2\sqrt{\frac{1}{x}}\cos x$$

Dwie funkcje występujące w rozwiązaniu ogólnym są niezależne. Dobierając odpowiednio normalizację dostajemy:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \qquad \text{oraz} \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

Korzystając z relacji rekurencyjnej można znaleźć wyrażenia na $J_{\pm n/2}(x)$, np.:

$$J_{3/2}(x) = \frac{1}{x}J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$$

Uwaga: Wszystkie funkcje Bessela $J_{\pm n/2}(x)$ dla n nieparzystych można wyrazić za pomocą funkcji elementarnych.

Funkcja Bessela drugiego rodzaju $Y_\nu(x)$

Poszukujemy drugiego, niezależnego, rozwiązania r. Bessela w przypadku gdy $\nu = n$ gdzie $n = 0, 1, 2, ...$

Rozważmy najpierw przypadek $\nu = 0$, tzn. r. B. ma postać: $xy'' + y' + xy = 0$

Poszukujemy rozwiązania w postaci: $y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^{r+1}$

Wstawiając do równania otrzymujemy:

$$[xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x)]\ln x + 2J_0'(x) + \sum_{r=0}^{\infty}(r+1)rb_r x^r + \\ + \sum_{r=0}^{\infty}(r+1)b_r x^r + \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^{r+2} = 0$$

Człon logarytmiczny znika bo $J_0(x)$ jest rozwiązaniem równania. Wstawiając za $J_0'(x)$ dostajemy:

$$2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-1}(m-1)!m!} + \sum_{r=0}^{\infty}(r+1)rb_r x^r + \sum_{r=0}^{\infty}(r+1)b_r x^r + \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^{r+2} = 0$$

Przesuwając indeks i grupując wyrazy otrzymujemy:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}x^{2m+1}}{2^{2m}(m+1)!m!} + b_0 + 4b_1 x + \sum_{r=2}^{\infty}\left\{(r+1)^2 b_r + b_{r-2}\right\}x^r = 0$$

Funkcja Bessela drugiego rodzaju $Y_\nu(x)$

Ponieważ widać, że $b_0 = 0$, więc wszystkie parzyste współczynniki b_{2m} też muszą znikać:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} x^{2m+1}}{2^{2m}(m+1)!m!} + 4b_1 x + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{4m^2 b_{2m-1} + b_{2m-3}\right\} x^{2m-1} = 0$$

Przyrównując współczynniki przy kolejnych potęgach x do zera, znajdujemy:

$$b_{2m-1} = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}(m!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{m}\right), \quad m = 1, 2, ...$$

A więc drugie, liniowo niezależne rozwiązanie, ma postać (dla $x > 0$):

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}, \quad \text{gdzie } \; h_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}$$

Ponieważ dowolna kombinacja liniowa niezależnych rozwiązań równania różniczkowego jest także jego rozwiązaniem, jako drugie rozwiązanie r. Bessela rzędu zerowego przyjmuje się przez konwencję:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}[y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_0(x)]$$

gdzie $\gamma = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{m} - \ln m\right) = 0.577215...$ jest stałą Eulera.

Funkcja Bessela drugiego rodzaju $Y_\nu(x)$

Funkcja Bessela drugiego rodzaju rzędy ν jest zdefiniowana jako:

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin\nu\pi}\left[J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)\right]$$

W szczególności dla $\nu = n \in \mathbb{Z}$ przyjmuje postać:

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right) + \frac{x^n}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}(h_m+h_{m+n})}{2^{2m+n}m!(m+n)!}x^{2m} -$$
$$-\frac{1}{\pi x^n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{2^{2m-n}m!}x^{2m}$$

Rozwiązanie ogólne r. Bessela dla dowolnych ν: $y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$

Własności funkcji Bessela drugiego rodzaju:

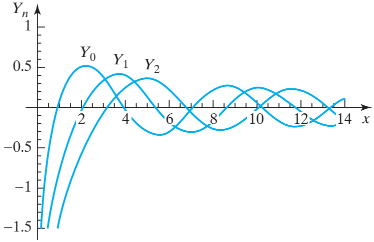
- przybliżenia dla małych x:

$Y_0(x) \approx \frac{2}{\pi}\ln x, \qquad Y_\nu(x) \approx -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu, \;\; \nu > 0$

- zachowanie asymptotyczne dla dużych x:

$Y_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left[x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right]$

- $\lim\limits_{x\to 0} Y_\nu = -\infty, \qquad \lim\limits_{x\to\infty} Y_\nu(x) = 0.$



Zmodyfikowane funkcje Bessela $I_\nu(x)$ oraz $K_\nu(x)$

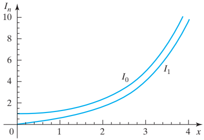
Zastępując zmienną niezależną x w równaniu Bessela przez ix otrzymujemy zmodyfikowane równanie Bessela rzędu ν:

$$x^2y'' + xy' - (x^2+\nu^2)y = 0$$

Równanie to ma dwa niezależne zespolone rozwiązania $J_\nu(ix)$ oraz $Y_\nu(ix)$.
Wygodniej jednak posługiwać się rozwiązaniami rzeczywistymi:

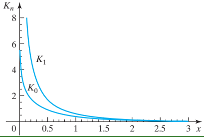
$$J_\nu(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (ix)^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m!\Gamma(m+1+\nu)} = i^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m!\Gamma(m+1+\nu)} \equiv i^\nu I_\nu(x)$$

gdzie $I_\nu(x)$ to zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu ν.
Ogólne rozwiązanie w przypadku gdy $\nu \notin \mathcal{Z}$: $y(x) = C_1 I_\nu(x) + C_2 I_{-\nu}(x)$



Definiujemy zmodyfikowaną funkcję Bessela drugiego rodzaju rzędu ν:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}\right)$$



Definicję tę można rozszerzyć na $\nu = n$ podobnie jak dla niezmodyfikowanych funkcji Bessela.

Ogólne rozwiązanie zmodyfikowanego r. Bessela przyjmuje wówczas postać: $y(x) = C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x)$