Zestaw 11 / Matematyczne Metody Fizyki II

1. Czy tworzą grupę:
   - $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ wraz z mnożeniem (mod 7),
   - $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ wraz z mnożeniem (mod 6),
   - $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \ : \ a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$, wraz z mnożeniem macierzy,
   - $G = \{z : \ z \in \mathbb{C} \ \text{i} \ |z| = 1\}$ wraz z dodawaniem liczb zespolonych,
   - zbiór funkcji
   $$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \frac{1}{1-x} \qquad f_3(x) = \frac{x-1}{x}$$
   $$f_4(x) = \frac{1}{x} \qquad f_5(x) = 1 - x \qquad f_6(x) = \frac{x}{x-1}$$
   wraz z operacją składania funkcji.

2. Czy zbiór wszystkich macierzy hermitowskich stopnia n jest grupą względem a) mnożenia macierzy, b) dodawania macierzy?

3. Dowieść, że jeżeli H jest podzbiorem grupy G, to H jest podgrupą wtedy i tylko wtedy gdy $ab^{-1} \in H$ dla dowolnych $a, b \in H$.

4. Udowodnić, że następujące zbiory macierzy:
$$SU(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \ \text{ i } \ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$
$$E(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \exp\left(\frac{1}{2} i\phi\right) & \exp\left(\frac{1}{2} i\phi\right) z \\ 0 & \exp\left(-\frac{1}{2} i\phi\right) \end{bmatrix} \ : \ \phi = \overline{\phi}, \quad z \in \mathbb{C} \right\}$$
są podgrupami grupy $SL(2, C)$. $SL(2, C)$jest grupą macierzową zawierającą wszystkie macierze zespolone stopnia 2 o wyznaczniku równym 1:
$$SL(2, C) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \ : \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} \ \text{ i } \ \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\}$$

5. Podaj osiem operacji symetrii przeprowadzających kwadrat w siebie wprzestrzeni R^2. Pokaż, że tworzą one grupę oraz podaj tabelkę mnożenia grupowego. Określ rząd każdego z elementów tej grupy.

6. Znajdź odwrotności permutacji:
$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 8 & 1 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$
i pokaż bezpośrednim rachunkiem, że $(\pi_1 \cdot \pi_2)^{-1} = \pi_2^{-1} \cdot \pi_1^{-1}$.

7. Wyraź następujące permutacje jako iloczyny rozłącznych cykli. Podaj parzystość każdej z permutacji.
$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$