

Zestaw 13 / Matematyczne Metody Fizyki II

1. Znajdź wartość stacjonarną funkcjonału przy podanych warunkach brzegowych:

(a) $J[y] = \int_0^1 (y'^2 - y^2 + 2xy)dx$, $y(0) = 0$ i $y(1) = 1$,

(b) $J[y] = \int_0^\pi (y'^2 - ky^2)dx$, $y(0) = 0$ i $y(\pi) = 0$,

(c) $J[y] = \int_1^2 \frac{y'^2}{x^3} dx$, $y(1) = 3$ i $y(2) = 18$. Pokaż, że znaleziona wartość stacjonarna jest globalnym minimum.

2. Samolot porusza się w płaszczyźnie (x, z) z punktu $(-a, 0)$ do $(a, 0)$, przy czym $z = 0$ oznacza poziom ziemi. Koszt lotu samolotu na wysokości z wynosi $\exp(-kz)$ na jednostkę odległości, gdzie $k > 0$ jest znaną stałą. Znajdź wartość stacjonarną w problemie polegającym na minimalizacji całkowitego kosztu podróży.

3. Linia geodezyjną nazywamy najkrótszą odległość pomiędzy dwoma punktami. Znajdź linie geodezyjne łączące dwa dowolne punkty na powierzchni: (a) sfery, (b) walca, (c) stożka. W zależności od problemu wygodnie posłużyć się współrzędnymi sferycznymi lub cylindrycznymi.

4. Zgodnie z zasadą Fermat'a promień światła porusza się pomiędzy dwoma punktami po trajektorii która minimalizuje czas jego podróży. Rozważmy promień rozchodzący się w medium, którego współczynnik załamania dany jest przez $n = n_0 \left(1 + \frac{z}{a}\right)^{1/2}$, gdzie n_0 oraz a są dodatnimi stałymi. Załóżmy, że promień światła przechodząc przez początek układu współrzędnych porusza się poziomo. Pokaż, że trajektoria tego promienia nie jest linią prostą lecz parabolą $z = x^2/4a$.

5. Producent płynu do prania musi wyprodukować objętość X płynu w czasie T . Niech $x(t)$ oznacza objętość płynu wyprodukowaną po czasie t . Załóżmy, że koszt produkcji na jednostkę objętości dany jest przez $\alpha + \beta\dot{x}$, natomiast koszt magazynowania na jednostkę czasu przez γx , gdzie α , β i γ są dodatnimi stałymi. Całkowity koszt produkcji opisany jest funkcjonałem:

$$K = \int_0^X (\alpha + \beta\dot{x})dx + \int_0^T \gamma x dt = \int_0^T [(\alpha + \beta\dot{x})\dot{x} + \gamma x] dt$$

Znajdź funkcję $x(t)$ określającą optymalną szybkość produkcji. W obliczeniach przyjmij $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $T = 4$ oraz warunki brzegowe $x(0) = 0$ i $x(4) = X$.