Zestaw 8 / Matematyczne Metody Fizyki II

1. **Rozwiąż równanie różniczkowe $y'' + y = 0$, stosując rozwinięcie $y(x)$ w szereg potęgowy.**

2. **Rozwiąż podane równanie różniczkowe stosując rozwinięcie $y(x)$ w szereg Frobeniusa.**
   - $xy'' + 2y' + xy = 0$,
   - $8x^2y'' + 10xy' + (x-1)y = 0$,
   - $4xy'' + 2y' - y = 0$,
   - $x^2y'' - xy' - \left(x^2 + \frac{5}{4}\right) y = 0$

3. **Znajdź rozwiązania równania różniczkowego (równanie Bessel'a)**

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0$$

gdzie n jest znaną liczbą, w postaci szeregu Frobeniusa

$$y = x^p \sum_{j=0} a_j x^j = \sum_{j=0} a_j x^{j+p}, \quad a_0 \neq 0,\ p = const$$

Przekonaj się, że rozwiązanie to przyjmuje postać funkcji Bessel'a

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{n+2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

4. **Pokaż, że funkcje Bessela: $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$, oraz $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$**

5. **Pokaż, że $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{n+1} J_{n+1}(x)\right] = x^{n+1} J_n(x)$, $\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$**

6. **Znajdź rozwiązanie równania Laguerre'a**

$$xy'' + (1-x)y' + qy = 0$$

gdzie q jest pewną stałą.

7. **Znajdź rozwiązanie równania $xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = 0$**

8. **Korzystając z postaci funkcji tworzącej funkcji Bessela**

$$e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, z^n$$

wykaż

   a) $2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$,
   b) $\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x)$,
   c) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(x) = 1$.