Zestaw 10 / Estymatory II:

1. **Niech $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$ będzie n–elementową próbą prostą pochodzącą z rozkładu wykładniczego o nieznanym parametrze τ. Załóżmy, że badacz A obserwuje te dane bezpośrednio. Z kolei badacz B obserwuje te same dane, ale po przejsciu przez cyfrowy filtr, który działa w ten sposób, że na wyjściu daje 0 jeśli $t_i \leqslant c$ oraz 1 jeśli $t_i > c$, gdzie c jest pewną stałą (tzw. próg). Załóżmy, że w k spośród n przypadków na wyjściu filtra otrzymano 0. Zarówno badacz A jak i badacz B korzystając z metody największej wiarogodności znajduje estymator parametru τ i jego błąd. Powtórz rachunki wykonane przez obu badaczy.**

2. **(RN 7.2.3) Dysponujemy dwiema niezależnymi ocenami pewnego kąta θ: wartością c dla $\cos\theta$ i wartością s dla $\sin\theta$, przy czym obie oceny charakteryzują się rozkładem gaussowskim z tą samą, znaną dyspersją σ. Znajdź metodą największej wiarogodności estymator kąta θ oraz jego niepewność.**

3. **(RN 7.2.10) W niektórych problemach fizycznych (np. defekty w kryształach, ustawienia spinu) pojawia się rozkład dwumianowy, w którym prawdopodobieństwo p sukcesu w pojedynczej próbie dane jest przez:**
$$p = \frac{1}{1 + \exp(-\theta)}$$
Przypuśćmy, że wykonano n prób, z których k zakończyło się sukcesem. Oceń metodą największej wiarogodności, parametr θ i jego niepewność.

4. **Dana jest n elementowa próba prosta, x_1, x_2, ..., x_n, pochodząca z rozkładu płaskiego określonego na przedziale $[a, b]$. Znajdź metodą największej wiarogodności estymatory krańców przedziału $\hat{a}$ i $\hat{b}$. W jaki sposób można wyznaczyć ich niepewności.**

5. **Z jeziora pobrano pewną liczbę jednolitrowych oraz pewną liczbę dwulitrowych próbek wody. Po analizie okazało się, że spośród próbek jednolitrowych w n_1 próbkach stwierdzono obecność pewnego typu bakterii, natomiast pozostałe m_1 próbek nie zawierało tego typu bakterii. Podobna analiza wykazała, że w przypadku próbek dwulitrowych w n_2 próbkach stwierdzono obecność batkerii, a pozostałe m_2 próbek nie zawierało bakterii. Korzystając z metody największej wiarogodności, oszacuj warość parametru μ określającego średnią liczbę bakterii badanego typu w jednym litrze wody w tym jeziorze.**

6. **Pewnego dnia jeden ze sprzedawców w sklepie stwierdził, że pomiędzy godziną 12:00 i 12:45 do sklepu przybyło dwóch klientów. Inny sprzedawca zauważył, że tego samego dnia pomiędzy godzinami 12:15 i 13:00 do sklepu przybył tylko jeden klient. Zakładając, że liczba klientów odwiedzających ten sklep może być opisana rozkładem Poissona z nieznanym parametrem λ (liczba klientów / godzinę), wykorzystaj obserwacje obu sprzedawców, do określenia metodą największej wiarogodności estymatora parametru λ i jego niepewność.**
Wskazówka: Zastanów się jak w tym problemie zdefiniować próbę prostą.
Odp. $\hat{\lambda} \approx 2.117$

7. **Niedoświadczony łucznik oddaje n strzałów do tarczy o nieznanym promieniu θ. Tarcza zostaje trafiona za każdym razem, ale w zupełnie losowym miejscu. Niech r_1, r_2, ..., r_n oznaczają odległości poszczególnych trafień od środka tarczy. Znajdź metodą największej wiarogodności estymator promienia tarczy $\hat{\theta}$ i jego niepewność.**