Zestaw 13 / Przedziały ufności, hipotezy, estymatory, ...

1. Wiemy, że rozkład liczby cząstek α emitowanych przez źródło promieniotwórcze w określonym przedziale czasu ma rozkład Poissona. Stosując centralne twierdzenie graniczne do wartości średniej $\bar{\mathrm{x}}_n$ dla dużej liczby n niezależnych zmiennych z rozkładu Poissona, znajdź na poziomie ufności $1-\alpha = 95\%$ przedział ufności dla nieznanego parametru μ rozkładu Poissona.

2. Dana jest próba prosta x_1, x_2, ..., x_{12} zmiennych z rozkładu płaskiego określonego na przedziale $(0,\theta)$, gdzie θ jest nieznanym parametrem. Niech $\mathrm{M} = \max\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, ..., \mathrm{x}_{12}\}$.
   (a) Pokaż, że dla $0 \le t \le 1$ zachodzi
   $$P\left(\frac{M}{\theta} \le t\right) = t^{12}$$
   (b) Znajdź wartości c_l i c_u spełniające warunki:
   $$P\left(\frac{M}{\theta} \le c_l\right) = P\left(\frac{M}{\theta} \ge c_u\right) = \frac{\alpha}{2}$$
   (c) Przypuśćmy, że zmienna losowa M przyjęła wartość $m = 3$. Skonstruuj na poziomie ufności $1-\alpha = 90\%$ przedział ufności dla parametru θ.
   (d) Znajdź ogólne wyrażenie na przedział ufności dla parametru θ na poziomie ufności $1-\alpha$ dysponując próbą losową prostą o liczebności n.

3. Dane są próby proste x_1, x_2, ..., x_n oraz y_1, y_2, ..., y_m pochodzące z rozkładów normalnych o tej samej wariancji σ^2. Można pokazać (proszę spróbować to zrobić, wiedząc, że dla rozkładu normalnego $\mu_4 \equiv \langle(\mathrm{x}-\mu)^4\rangle = 3\sigma^4$), że:
   $$\mathrm{Var}(s_{\mathrm{x}}^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} \quad \text{oraz} \quad \mathrm{Var}(s_{\mathrm{x}}^2) = \frac{2\sigma^4}{m-1}$$
   Rozważmy kombinacje liniowe $as_{\mathrm{x}}^2 + bs_{\mathrm{y}}^2$, które są nieobciążonymi estymatorami parametru σ^2. (a) Pokaż że $a+b=1$, (b) Wyznacz stałe a i b tak aby $\mathrm{Var}(as_{\mathrm{x}}^2 + bs_{\mathrm{y}}^2)$ była minimalna.

4. Dane są próby proste x_1, x_2, ..., x_n oraz y_1, y_2, ..., y_m pochodzące z rozkładów normalnych o wariancjach σ_{x}^2 oraz σ_{y}^2.
   (a) Pokaż, że $\mathrm{Var}(\bar{\mathrm{x}}_n - \bar{\mathrm{y}}_m) = \dfrac{\sigma_{\mathrm{x}}^2}{n} + \dfrac{\sigma_{\mathrm{y}}^2}{m}$
   (b) Pokaż, że estymator
   $$s_p^2 = \frac{n+m}{n+m-2}\left(\frac{n-1}{m}s_{\bar{\mathrm{x}}}^2 + \frac{m-1}{n}s_{\bar{\mathrm{y}}}^2\right)$$
   jest obciążonym estymatorem wariancji $\mathrm{Var}(\bar{\mathrm{x}}_n - \bar{\mathrm{y}}_m)$.
   (c) Pokaż, że estymator:
   $$s_d^2 \equiv \frac{s_{\mathrm{x}}^2}{n} + \frac{s_{\mathrm{y}}^2}{m}$$
   jest jedynym nieobciążonym estymatorem dla $\mathrm{Var}(\bar{\mathrm{x}}_n - \bar{\mathrm{y}}_m)$ w postaci $as_{\mathrm{x}}^2 + bs_{\mathrm{y}}^2$.
   (d) Przypuśćmy, że $\sigma_x^2 = \sigma_y^2\sigma^2$. Pokaż, że estymator s_p^2 zdefiniowany powyżej, jest nieobciążonym estymatorem wariancji $\mathrm{Var}(\bar{\mathrm{x}}_n - \bar{\mathrm{y}}_m) = \sigma^2(1/n + 1/m)$.
   (e) Czy estymator s_p^2 jest także nieobciążonym estymatorem dla $\mathrm{Var}(\bar{\mathrm{x}}_n - \bar{\mathrm{y}}_m)$ w przypadku gdy $\sigma_{\mathrm{x}}^2 \ne \sigma_{\mathrm{y}}^2$?