Zestaw 2 / Kombinatoryka, prawdopodobieństwo:

1. Na ile sposobów można posadzić przy okrągłym stole n osób? Na ile sposobów można to zrobić jeśli wiadomo, że dwie ustalone osoby nie chcą siedzieć obok siebie?

2. (RN 2.2.9) Na odcinku $[0, 1]$ na osi liczbowej umieszczono losowo punkty A i B. Oblicz prawdopodobieństwo P, że punkt A będzie bliżej punktu B niż krańców przedziału.

3. (RN 2.2.16) Tadeusz i Zosia umówili się w kawiarni między 17:00 i 18:00. Obydwoje są bardzo dumni i nie zamierzają czekać na partnera dłużej niż 15 minut. Ile wynosi prawdopodobieństwo P, że randka dojdzie do skutku, jeśli zarówno Zosi jak i Tadziowi na tyle brakuje punktualności, że moment pojawienia się każdego z nich w kawiarni można traktować jako losowy między wyznaczonymi godzinami?

4. W szafce na buty znajduje się n par butów w n różnych kolorach. Wybieramy losowo $2m$ butów spośród $2n$ butów. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że wśród wybranych butów jest co najmniej jedna kompletna para butów.

5. (RN 2.4.3) Cztery osoby opatrzone numerami 1, 2, 3 i 4, siadają losowo na czterech krzesłach oznaczonych tymi samymi numerami. Wypisz postać wszystkich zdarzeń elementarnych. Znajdź prawdopodobieństwo P_k, że liczba $k = 1, 2, 3, 4$ osób usiądzie na "swoich" krzesłach. Zadanie proszę najpierw rozwiązać ogólnie dla n osób, korzystając z formuły włączania-wyłączania.

6. W zaciemnionym pokoju znajduje się dziesięć krzeseł. Do pokoju wchodzi sześć osób i zajmuje w sposób losowy sześć krzeseł. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że przynajmniej jedno spośród trzech ustalonych krzeseł zostało zajęte?

7. (RN 2.4.28) W urnie znajduje się m białych i $n - m$ czarnych kul. Dwóch graczy wyciąga kolejno losowo kule z urny i wrzuca je z powrotem. Wygrywa ten z graczy, który pierwszy wyciągnie kulę białą. (a) Ile wynosi prawdopodobieństwo P wygrania gry przez gracza, który ją rozpoczyna? (b) Rozwiąż to samo zadanie, gdy raz wylosowane kule nie wracają do urny.

8. (RN 2.4.37) Bakteria po upływie czasu $T = 30$ min dzieli się na dwie. Między dwoma podziałami podlega ryzyku śmierci z prawdopodobieństwem $q = 30\%$. T i q sa takie same dla wszystkich bakterii. Przyjmijmy, że możliwości utrzymania się przy życiu każdej z bakterii są niezależne. Oblicz prawdopodobieństwo, że po godzinnym eksperymencie, będziemy mieć: zero, jedną, dwie, trzy lub cztery żywe bakterie, każda w trakcie podziału na dwie, jeżeli rozpoczeliśmy od jednej bakterii, która właśnie uległa podziałowi.