

Zestaw 4 / Zmienna losowa: podstawy

1. (KI-2.44) Dana jest funkcja prawdopodobieństwa zmiennej losowej X :

x_i	-5	-2	0	1	3	8
p_i	0.1	0.2	0.1	0.2	c	0.1

Wyznacz: (a) stałą c ; (b) wykres funkcji prawdopodobieństwa; (c) dystrybuantę; (d) prawdopodobieństwa: $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X < 3)$, $P(X < 2)$, $P(X \geq 0)$, $P(-2 < X < 3)$.

2. Dana jest dystrybuanta zmiennej losowej X :

x	$(-\infty, -2)$	$\langle -2, 1 \rangle$	$\langle 1, 3 \rangle$	$\langle 3, +\infty \rangle$
$F(x)$	0	0.2	0.8	1

Znajdź jej rozkład prawdopodobieństwa.

3. Czas bezawaryjnej pracy licznika opisuje funkcja gęstości:

$$f(t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad t > 0$$

a) Przyjmując $\tau = 2$ oblicz prawdopodobieństwo, że licznik zepsuje się pomiędzy $t = 5$ a $t = 10$.

b) Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej t .

c) Oblicz prawdopodobieństwo, że bezawaryjny czas pracy wyniesie co najmniej dwie godziny.

d) Oblicz medianę oraz górny i dolny kwartył.

4. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x + y)e^{-(x+y)} & \text{dla } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x, y) \end{cases}$$

Wyznacz (a) dystrybuantę tej zmiennej, (b) $P(|X| < 1, |Y| > 1)$, (c) rozkład brzegowy zmiennej losowej X , (d) rozkład warunkowy $g(Y | X = x)$.

5. Rozmiary powodzi charakteryzuje się za pomocą dwóch zmiennych: czasu trwania powodzi X , i całkowitych opadów atmosferycznych Y . Niech gęstość zmiennej losowej X będzie określona wzorem:

$$f_1(x) = \begin{cases} c(x - 2)^2 & \text{dla } 2 < x \leq 7, \\ c(12 - x)^2 & \text{dla } 7 < x \leq 12, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

Wyznacz stałą c , a następnie wiedząc, że:

$$f(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{dla } \frac{1}{2}x - 1 \leq y \leq \frac{1}{2}x + 2 \\ 0 & \text{dla pozostałych } y \end{cases}$$

wyznacz gęstość oraz dystrybuantę dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) .