

Zestaw 5 / Funkcje zmiennych losowych

Uwaga: Pytania o dyspersje i współczynnik korelacji w poniższych zadaniach proszę na razie pominąć. Wrócimy do nich za dwa tygodnie.

1. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy $\mathcal{E}(x; \lambda) = \lambda \exp(-\lambda x)$ z parametrem $\lambda = 1$, natomiast zmienna losowa Y ma rozkład płaski na przedziale $[0, 1]$. Znajdź rozkład zmiennej losowej $U = X + Y$.
2. Łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennych X_1, X_2, X_3 dana jest przez:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{2}{2e-5} x_1^2 x_2 \cdot \exp(x_1 x_2 x_3) & \text{dla } 0 < x_1, x_2, x_3 < 1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Znajdź funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej $U = X_1 X_2 X_3$.

3. Dane są niezależne zmienne losowe X_1 i X_2 o jednakowych funkcjach gęstości prawdopodobieństwa:

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Znajdź łączną funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennych $Y_1 = X_1 \sqrt{X_2}$ i $Y_2 = X_2 \sqrt{X_1}$. Czy zmienne Y_1 i Y_2 są statystycznie niezależne?

4. Zmienne losowe X i Y mają łączny rozkład prawdopodobieństwa dany przez

$$f(x, y) = \begin{cases} cx & \text{dla } 0 < x^2 < y < \sqrt{x} < 1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Znajdź rozkład prawdopodobieństwa zmiennej $U = XY$.

5. Niech zmienne losowe X i Y mają łączną funkcję gęstości prawdopodobieństwa zadaną przez:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y} e^{-x/y} e^{-y} & \text{dla } 0 < x, y < \infty \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Czy zmienne losowe X/Y oraz Y są statystycznie niezależne?

6. Niech X oraz Y będą dwiema niezależnymi zmiennymi losowymi pochodzącymi z rozkładu Pareto, odpowiednio z parametrami α i β . Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu Pareto ma postać

$$Par(x; \alpha) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} \quad \text{gdzie } x \geq 1 \text{ oraz } \alpha > 0$$

- (a) Znajdź funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej $U = X/Y$.
- (b) Znajdź współczynnik korelacji pomiędzy zmiennymi U i Y .

7. (RN 3.3.3) Dwuwymiarowa dyskretna zmienna losowa (k,m) opisana jest rozkładem zadany w tabeli. Znajdź rozkłady brzegowe obu zmiennych losowych oraz ich wartości oczekiwane i dyspersje. Ile wynosi współczynnik korelacji między zmiennymi k oraz m ? Podaj postacie rozkładów warunkowych i znajdź dla tych rozkładów wartości oczekiwane i dyspersje. Oblicz także wartość oczekiwaną i dyspersję zmiennej losowej $n=2m+k^2$. Podaj postać rozkładu tej zmiennej.

P_{mk}		k		
		-1	0	1
m	0	0.1	0.2	0.0
	1	0.2	0.3	0.2