

## Zestaw 6 / Funkcje zmiennych losowych, korelacje

1. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład o gęstości prawdopodobieństwa:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}(x-1)^2 & \text{dla } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Znajdź rozkład  $g(y)$  zmiennej losowej  $Y = X^2$ . Sprawdź normalizację rozkładu  $g(y)$ .

2. (RN 2.6.3) Stoimy nad morzem w miejscu, w którym brzeg ma kształt linii prostej. Wybieramy losowy kierunek, ale taki, który nie zaprowadzi nas do wody, i wykonujemy spacer na odcinku  $a$ . Jaki jest rozkład  $f(x; a)$  naszej odległości  $x$  od brzegu morza? Sprawdź czy rozkład ten jest poprawnie unormowany.

3. Niech  $X$  i  $Y$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o gęstościach prawdopodobieństwa:

$$f_X(x) \propto xe^{-x/2} \quad \text{i} \quad f_Y(y) \propto ye^{-y/2} \quad x, y > 0$$

Znajdź gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $Z = X + Y$ .

4. Znajdź rozkład gęstości prawdopodobieństwa objętości walca którego promień podstawy jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku  $(0, R)$ , a wysokość podlega rozkładowi liniowemu ( $f(h) \propto h$ ) na odcinku  $(0, H)$ . Promień i wysokość walca są zmiennymi statystycznie niezależnymi.

5. (RN 3.3.5) Para zmiennych losowych  $X$  oraz  $Y$  podlega rozkładowi:

$$f(x, y) \propto x + y \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$

Znajdź współczynnik korelacji między nimi. Jak zmieni się odpowiedź, jeśli zakres obu zmiennych rozciągniemy na przedział  $[-1, 1]$ ?

6. Niech  $X$  i  $Y$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi pochodzącymi z rozkładu płaskiego określonego na przedziale  $(a, b)$ , gdzie  $0 < a < b < \infty$ .

(a) Znajdź funkcję gęstości prawdopodobieństwa  $g_1(u)$  zmiennej losowej  $U = X/Y$ .

(b) Znajdź wartość oczekiwaną zmiennej losowej  $U$ .

(c) Znajdź dystrybuantę zmiennej losowej  $U$ .

7. W układzie kartezjańskim mierzony jest punkt o współrzędnych  $x$  i  $y$ , przy czym błąd (niepewność) współrzędnej  $y$  jest  $n$  razy większy niż współrzędnej  $x$ . Pomiary obu współrzędnych są niezależne. Oblicz macierz kowariancji współrzędnych biegunowych  $r$  i  $\phi$ .