

Zestaw 7 / Linie regresji / Randomizacja:

1. Zmienne losowe X i Y mają łączny rozkład prawdopodobieństwa dany przez:

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2y^3} e^{-x/y} \quad \text{dla } 0 < x < \infty, 0 < y < 1$$

(a) Znajdź rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y . (b) Znajdź warunkowy rozkład prawdopodobieństwa $f(X | Y = y)$. (c) Wykorzystaj wyniki otrzymane w (a) i (b) do znalezienia wartości oczekiwanej i wariancji zmiennej losowej X .

2. Zmienne losowe X i Y mają łączny rozkład prawdopodobieństwa dany przez

$$f(x, y) = cx \quad \text{dla } x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$$

Znajdź warunkowe wartości oczekiwane $\mathcal{E}(Y | X = x)$ oraz $\mathcal{E}(X | Y = y)$.

3. Zmienne losowe X i Y mają łączny rozkład prawdopodobieństwa dany przez

$$f(x, y) = cx^2y \quad \text{dla } 0 < y < x < 1$$

Znajdź oba rozkłady brzegowe, wartości oczekiwane $\mathcal{E}(X)$ i $\mathcal{E}(Y)$, oraz warunkowe wartości oczekiwane $\mathcal{E}(Y | X = x)$ oraz $\mathcal{E}(X | Y = y)$.

4. Zmienne losowe X i Y mają łączny rozkład prawdopodobieństwa dany przez

$$f(x, y) = \frac{2}{5}(2x + 3y) \quad \text{dla } 0 < x, y < 1$$

Znajdź warunkowe wartości oczekiwane $\mathcal{E}(Y | X = x)$ oraz $\mathcal{E}(X | Y = y)$.

5. Oblicz warunkową wartość oczekiwaną $\mathcal{E}(N | M = m)$ wiedząc, że dyskretne zmienne losowe M i N mają łączny rozkład prawdopodobieństwa dany przez:

$$P(M = m, N = n) = \binom{m}{n} \frac{1}{2^m} \frac{m}{15} \quad \text{gdzie } m = 1, 2, \dots, 5 \quad \text{oraz } n = 0, 1, \dots, m.$$

Oblicz także wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej N .

6. Niech zmienna losowa X ma rozkład jednostajny, symetryczny wokół zera $U(-a, a)$ przy czym parametr a tego rozkładu podlega rozkładowi jednostajnemu na przedziale $[0, 1]$, tzn.

$$X | A = a \in U(-a, a) \quad \text{gdzie } A \in U(0, 1)$$

Znajdź rozkład zmiennej losowej X oraz jej wartość oczekiwaną i wariancję.

7. Niech zmienna losowa Y opisuje prawdopodobieństwo wyrzucenia orła w pojedynczym rzucie monetą, natomiast zmienna X_n niech oznacza liczbę orłów otrzymanych w n rzutach, tzn.

$$X_n | Y = y \in \mathcal{B}(n, y) \quad \text{gdzie } f(y) = 6y(1 - y), \quad 0 < y < 1$$

Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X_n oraz znajdź jej rozkład.