Analiza danych

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 6

MNK - dopasowanie linii prostej

- Rozważmy dopasowanie linii prostej do danych doświadczalnych:

$$\vec{\eta} = \Phi\vec{\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

- Zakładamy, że pomiary nie są skorelowane:

$$\mathrm{V} = \begin{bmatrix} \mathrm{s}_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathrm{s}_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathrm{s}_n^2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{s}_1^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathrm{s}_2^{-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathrm{s}_n^{-2} \end{bmatrix}$$

- Wprowadzamy oznaczenia:

$$\mathrm{S} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{s}_i^2} \qquad \mathrm{S}_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\mathrm{s}_i^2} \qquad \mathrm{S}_{xx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\mathrm{s}_i^2} \qquad \mathrm{S}_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{\mathrm{s}_i^2}$$

$$\mathrm{S}_y = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\mathrm{s}_i^2} \qquad \mathrm{S}_{yy} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{\mathrm{s}_i^2} \qquad \Delta = \frac{1}{\mathrm{SS}_{xx} - \mathrm{S}_x^2}$$

MNK - dopasowanie linii prostej

- Konstruujemy macierze W i Ψ:

$$\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{V}^{-1}\Phi =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{s}_1^{-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathrm{s}_n^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}_1^2} & \dots & \frac{1}{\mathrm{s}_n^2} \\ \frac{x_1}{\mathrm{s}_1^2} & \dots & \frac{x_n}{\mathrm{s}_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{S} & \mathrm{S}_x \\ \mathrm{S}_x & \mathrm{S}_{xx} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{W} = \left(\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{V}^{-1}\Phi\right)^{-1} = \Delta \begin{bmatrix} \mathrm{S}_{xx} & -\mathrm{S}_x \\ -\mathrm{S}_x & \mathrm{S} \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \mathrm{W}\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{V}^{-1} =$$

$$= \Delta \begin{bmatrix} \mathrm{S}_{xx} & -\mathrm{S}_x \\ -\mathrm{S}_x & \mathrm{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}_1^2} & \dots & \frac{1}{\mathrm{s}_n^2} \\ \frac{x_1}{\mathrm{s}_1^2} & \dots & \frac{x_n}{\mathrm{s}_n^2} \end{bmatrix} = \Delta \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{S}_{xx} - x_1\mathrm{S}_x}{\mathrm{s}_1^2} & \dots & \frac{\mathrm{S}_{xx} - x_n\mathrm{S}_x}{\mathrm{s}_n^2} \\ \frac{x_1\mathrm{S} - \mathrm{S}_x}{\mathrm{s}_1^2} & \dots & \frac{x_n\mathrm{S} - \mathrm{S}_x}{\mathrm{s}_n^2} \end{bmatrix}$$

- Wyznaczamy estymatory parametrów linii prostej:

$$\hat{\vec{\theta}} = \Psi\vec{y} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} = \Delta \begin{bmatrix} \mathrm{S}_{xx}\mathrm{S}_y - \mathrm{S}_{xy}\mathrm{S}_x \\ \mathrm{S}\mathrm{S}_{xy} - \mathrm{S}_x\mathrm{S}_y \end{bmatrix}$$

MNK - dopasowanie linii prostej

- Z macierzy $\mathrm{W} = \mathrm{V}[\hat{\vec{\theta}}]$ odczytujemy:

$$\mathcal{V}[\hat{\theta}_1] = \mathrm{S}_{xx}\Delta \qquad \mathcal{V}[\hat{\theta}_2] = \mathrm{S}\Delta \qquad \mathrm{cov}[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] = -\mathrm{S}_x\Delta \qquad \rho(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = -\frac{\mathrm{S}_x}{\sqrt{\mathrm{SS}_{xx}}}$$

- Obliczamy wartość statystyki $\mathcal{R}$ w minimum: $\mathcal{R}_{\min} = \mathrm{S}_{yy} - \mathrm{S}_y\hat{\theta}_1 - \mathrm{S}_{xy}\hat{\theta}_2$
- Ponieważ parametry są liniowymi funkcjami wielkości mierzonych, więc poziomice stałej wartości $\mathcal{R}$ (czyli χ^2) są elipsami:

$$\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(\theta_1-\hat{\theta}_1)^2}{\mathcal{D}^2[\hat{\theta}_1]} + \frac{(\theta_2-\hat{\theta}_2)^2}{\mathcal{D}^2[\hat{\theta}_2]} - 2\rho\left(\frac{\theta_1-\hat{\theta}_1}{\mathcal{D}[\hat{\theta}_1]}\right)\left(\frac{\theta_2-\hat{\theta}_2}{\mathcal{D}[\hat{\theta}_2]}\right)\right] = \mathcal{R} - \mathcal{R}_{\min}$$

- Problem dopoasowania do danych wielu nieliniowych funkcji można sprowadzić do problemu dopasowania linii prostej:

$$y = ab^x \qquad y' = \ln a + x\ln b = a' + b'x$$
$$y = ax^b \qquad y' = \ln a + b\ln x = a' + bx'$$
$$y = a\exp[bx] \qquad y' = \ln a + bx = a' + bx$$
$$y = \frac{x}{a+bx} \qquad y' = a\frac{1}{x} + b = b + ax'$$

Dopasowanie linii prostej - dygresja

- Dopasowanie linii prostej z pominięciem rachunku macierzowego:

$$\eta(x) = f(x;\vec{\theta}) = \theta_1 + \theta_2 x$$

- Znajdujemy wartości parametrów dla których $\mathcal{R}$ osiąga minimum:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta_1} = -2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i - \theta_1 - \theta_2 x_i}{\mathrm{s}_i^2}\right) = -2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\mathrm{s}_i^2} - \theta_1\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\mathrm{s}_i^2} - \theta_2\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\mathrm{s}_i^2}\right) \\ \dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta_2} = -2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\left(\frac{y_i - \theta_1 - \theta_2 x_i}{\mathrm{s}_i^2}\right) = -2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i y_i}{\mathrm{s}_i^2} - \theta_1\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\mathrm{s}_i^2} - \theta_2\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\mathrm{s}_i^2}\right) \end{cases}$$

- Przyrównując oba równania do zera otrzymujemy:

$$\hat{\theta}_1 = \Delta(\mathrm{S}_{xx}\mathrm{S}_y - \mathrm{S}_x\mathrm{S}_{xy}) \qquad \hat{\theta}_2 = \Delta(\mathrm{S}\mathrm{S}_{xy} - \mathrm{S}_x\mathrm{S}_y)$$

- Prosta najlepszego dopasowania, $\hat{\eta}(x) = \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 x$, pozwala dokonać interpolacji lub ekstrapolacji. Błąd tej operacji dany jest przez:

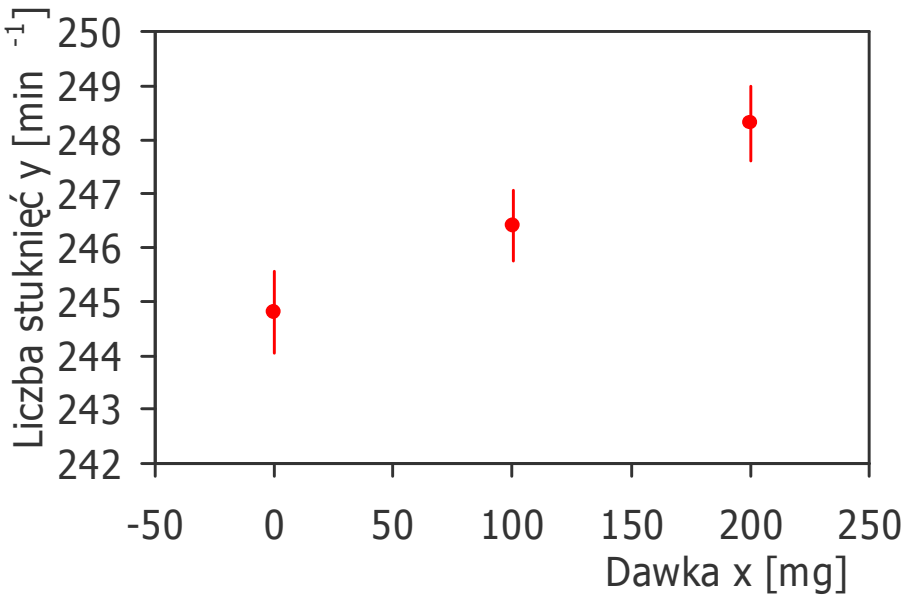
$$\mathcal{V}[\hat{\eta}] = \varphi^{\mathrm{T}}(x)\mathrm{W}\varphi(x) = \Delta\begin{bmatrix}1 & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{S}_{xx} & -\mathrm{S}_x \\ -\mathrm{S}_x & \mathrm{S}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ x\end{bmatrix} = \Delta(\mathrm{S}_{xx} - 2x\mathrm{S}_x + x^2\mathrm{S}) =$$

$$= \Delta\mathrm{S}\left(\frac{\mathrm{S}\mathrm{S}_{xx} - \mathrm{S}_x^2}{\mathrm{S}^2} + \left(x - \frac{\mathrm{S}_x}{\mathrm{S}}\right)^2\right) = \frac{1}{\mathrm{S}} + \mathcal{V}[\hat{\theta}_2]\left(x - \frac{\mathrm{S}_x}{\mathrm{S}}\right)^2$$

MNK - dopasowanie linii prostej

Przykład: Zbadano wpływ kofeiny na sprawność wykonywania prostych czynności manualnych. 30 studentów podzielono losowo na trzy grupy po 10 osób i każdej grupie podano rózne ilości kofeiny: 0 mg, 100 mg i 200 mg. Po dwóch godzinach poroszono ich o wykonanie z maksymalną szybkością czynności polegającej na stukaniu palcami po stole. Wyniki pomiarów przedstawia tabela:

Dawka x [mg]	Liczba stuknięć palcami y $\left[\text{min}^{-1}\right]$										$\overline{y} \pm \sigma_{\overline{y}}$
0	242	245	244	248	247	248	242	244	246	242	244.8 ± 0.76
100	248	246	245	247	248	250	247	246	243	244	246.4 ± 0.65
200	246	248	250	252	248	250	246	248	245	250	248.3 ± 0.70



Prosta dopasowana MNK:

$$y = \underbrace{244.7 \pm 0.7}_{\hat{\theta}_1 \pm \hat{\sigma}_{\theta_1}} + \underbrace{0.017 \pm 0.005}_{\hat{\theta}_2 \pm \hat{\sigma}_{\theta_2}} x$$

Kowariancja i współczynnik korelacji pomiędzy estymatorami parametrów:

$$\text{cov}[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] = -0.0028$$

$$\rho(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = -0.8$$

MNK - dopasowanie linii prostej

Niepewność inter- i ekstrapolacji:

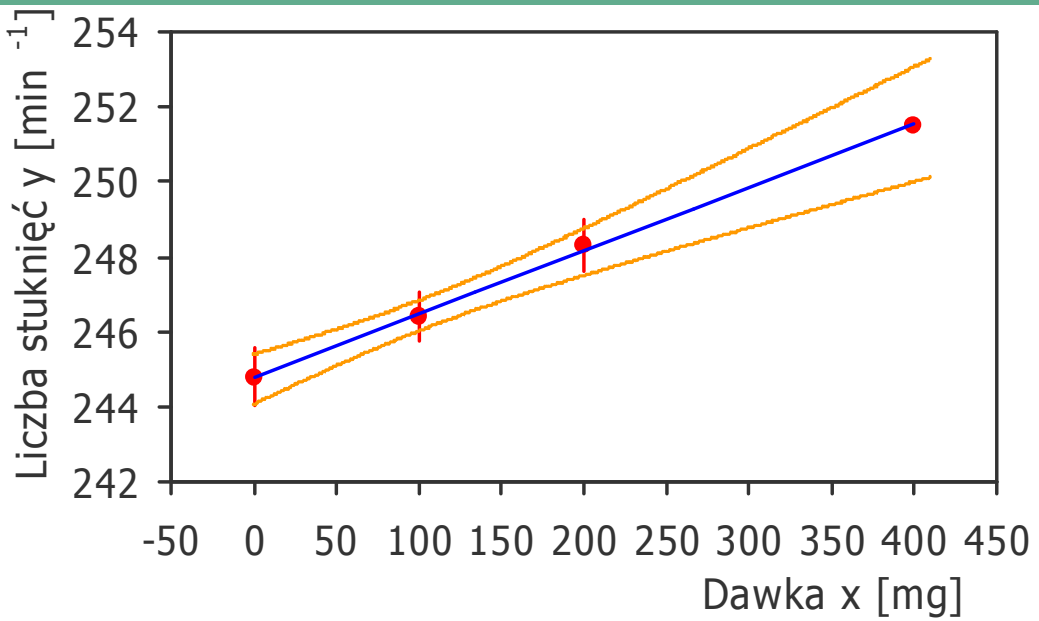
$$\mathrm{S} = 6.139 \qquad \mathrm{S}_x = 644.85$$

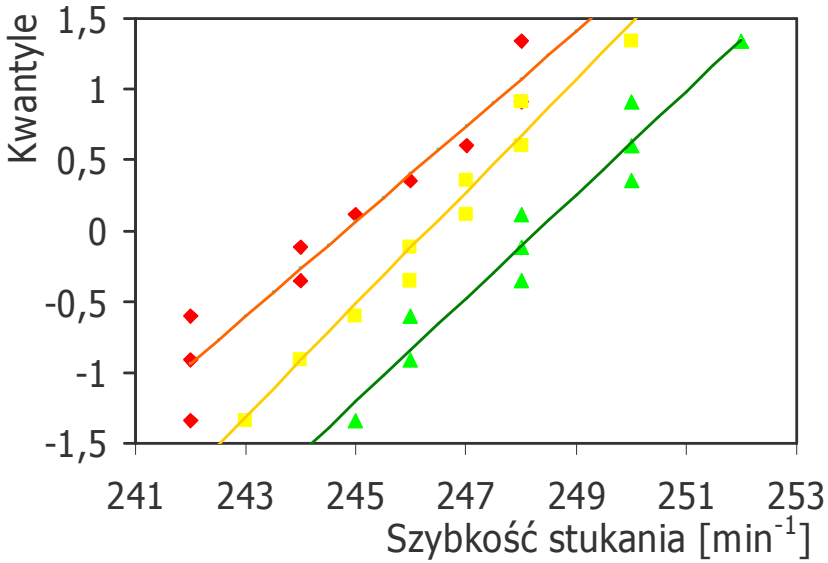
$$\hat{\eta}(x) =$$

$$\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 x \pm \sqrt{\frac{1}{\mathrm{S}} + \mathcal{V}[\hat{\theta}_2]\left(x - \frac{\mathrm{S}_x}{\mathrm{S}}\right)^2}$$

Przewidywanie dla $x = 400$:

$$\eta(400) = 251.5 \pm 1.5$$





Dystrybuanta empiryczna:

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \frac{i}{n+1} & x_i \leqslant x < x_{i+1} \\ \frac{n}{n+1} & x \geqslant x_n \end{cases}$$

$$F(q_i) = \frac{i}{n+1} = \frac{1}{11} \qquad q = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$F(q_i)$	0.091	0.182	0.273	0.364	0.455	0.546	0.636	0.727	0.818	0.909
q_i	-1.335	-0.908	-0.605	-0.349	-0.114	0.114	0.349	0.605	0.908	1.335

MNK - dopasowanie linii prostej

- Jeśli hipoteza o zależności liniowej jest prawdziwa, to statystyka $\mathcal{R}$ ma rozkład χ^2 o $n - m = 3 - 2 = 1$ stopniach swobody:

$$\mathcal{R}_{\min} = \mathrm{S}_{yy} - \mathrm{S}_y\hat{\theta}_1 - \mathrm{S}_{xy}\hat{\theta}_2 = 0.033 \quad \Rightarrow \quad P(\chi^2 > \mathrm{R}_{\min}) = \int_{\mathcal{R}_{\min}}^{\infty} \chi_1(u)du = 0.857$$

- Jeśli zażądamy $P(\chi^2 > \mathrm{R}_{\min}) = \int_{\mathcal{R}_{\min}}^{\infty} \chi_1(u)du = 0.99 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}_{\min} = 0.00015$
- Oznacza to,że średnie odchylenie każdego punktu od dopasowanej linii w jednostkach typowej niepewności wynosi tylko: $\sqrt{0.00015/3} \approx 0.007$
- Ponieważ parametry są liniowymi funkcjami wielkości mierzonych, więc poziomice stałej wartości $\mathcal{R}$ (czyli χ^2) są elipsmi:

$$\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(\theta_1 - \hat{\theta}_1)^2}{\mathcal{D}^2[\hat{\theta}_1]} + \frac{(\theta_2 - \hat{\theta}_2)^2}{\mathcal{D}^2[\hat{\theta}_2]} - 2\rho\left(\frac{\theta_1 - \hat{\theta}_1}{\mathcal{D}[\hat{\theta}_1]}\right)\left(\frac{\theta_2 - \hat{\theta}_2}{\mathcal{D}[\hat{\theta}_2]}\right)\right] = \mathcal{R} - \mathcal{R}_{\min}$$

MNK - przypadek liniowy - skalowana macierz kowariancji

- Jeśli nie jest znana macierz kowariancji wielkości mierzonych, to MNK pozwala znaleźć jej estymatę w pewnych szczególnych sytuacjach, np. gdy macierz ta znana jest z dokładnością do stałego czynnika, $\mathrm{V} = \sigma^2 \tilde{\mathrm{V}}$:

$$\hat{\vec{\theta}} = \Psi \vec{y} = \underbrace{\mathrm{W}\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{V}^{-1}}_{\Psi} \vec{y} = \underbrace{\left(\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{V}^{-1}\Phi\right)^{-1}}_{\equiv \mathrm{W}} \Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{V}^{-1}\vec{y} = \left(\Phi^{\mathrm{T}}\tilde{\mathrm{V}}^{-1}\Phi\right)^{-1} \Phi^{\mathrm{T}}\tilde{\mathrm{V}}^{-1}\vec{y}$$

$$\mathrm{V}[\hat{\vec{\theta}}] = \mathrm{W} = \left(\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{V}^{-1}\Phi\right)^{-1} = \sigma^2 \left(\Phi^{\mathrm{T}}\tilde{\mathrm{V}}^{-1}\Phi\right)^{-1} \equiv \sigma^2 \tilde{\mathrm{W}}$$

- Minimalna ważona suma kwadratów reszt, $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{\eta}_i = y_i - f(x_i, \hat{\vec{\theta}})$, przyjmuje postać:

$$\mathcal{R}_{\mathsf{min}} = \hat{\vec{\varepsilon}}^{\mathrm{T}}\mathrm{V}^{-1}\hat{\vec{\varepsilon}} = \left(\vec{y}^{\mathrm{T}} - \hat{\vec{\theta}}^{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}\right)\mathrm{V}^{-1}\left(\vec{y} - \Phi\hat{\vec{\theta}}\right) =$$

$$\left\{ \Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{V}^{-1}\Phi\vec{\theta} = \Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{V}^{-1}\vec{y} \;\Rightarrow\; \Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{V}^{-1}(\Phi\vec{\theta} - \vec{y}) = 0 \;\Rightarrow\; (\Phi\vec{\theta} - \vec{y})^{\mathrm{T}}\mathrm{V}^{-1}\Phi = 0 \right\}$$

$$= \left(\vec{y}^{\mathrm{T}} - \hat{\vec{\theta}}^{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}\right)\mathrm{V}^{-1}\vec{y} = \vec{y}^{\mathrm{T}}\mathrm{V}^{-1}\vec{y} - \hat{\vec{\theta}}^{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{V}^{-1}\vec{y} = \vec{y}^{\mathrm{T}}\mathrm{V}^{-1}\vec{y} - \hat{\vec{\theta}}^{\mathrm{T}}\mathrm{W}^{-1}\hat{\vec{\theta}} =$$

$$= \left\{ \vec{\eta} = \Phi\vec{\theta} \right\} = (\vec{y} - \vec{\eta})^{\mathrm{T}}\mathrm{V}^{-1}(\vec{y} - \vec{\eta}) - (\hat{\vec{\theta}} - \vec{\theta})^{\mathrm{T}}\mathrm{W}^{-1}(\hat{\vec{\theta}} - \vec{\theta})$$

- Można pokazać, że $\mathcal{E}\left[\mathcal{R}_{\mathsf{min}}\right] = \mathrm{Tr}(\mathrm{V}^{-1}\mathrm{V}) - \mathrm{Tr}(\mathrm{W}^{-1}\mathrm{W}) = n - m$

MNK - przypadek liniowy - skalowana macierz kowariancji

- Można więc zaproponować nieobciążony i niezależny od rozkładu estymator $\hat{\sigma}^2$:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\vec{\varepsilon}}^{\mathrm{T}} \tilde{\mathrm{V}}^{-1} \hat{\vec{\varepsilon}}}{n-m}$$

- W konsekwencji otrzymujemy pełną postać estymatorów macierzy kowariancji mierzonych wielkości oraz estymowanych parametrów:

$$\hat{\mathrm{V}} = \hat{\sigma}^2 \tilde{\mathrm{V}}, \qquad \hat{\mathrm{W}} = \hat{\sigma}^2 \left(\Phi^{\mathrm{T}} \tilde{\mathrm{V}}^{-1} \Phi \right)^{-1} \equiv \hat{\sigma}^2 \tilde{\mathrm{W}}$$

- Przykład: Rozważmy dopasowanie prostej $\eta(x) = \theta_1 + \theta_2 x$ do nieskorelowanych danych (x_i, y_i), których błędy znane są z dokładnością do czynnika skalującego, $s_i = \sigma u_i$:

$$S = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i^2} \equiv \frac{1}{\sigma^2} U, \qquad S_x = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{u_i^2} \equiv \frac{1}{\sigma^2} U_x, \qquad S_y = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{u_i^2} \equiv \frac{1}{\sigma^2} U_y$$

$$S_{xx} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{u_i^2} \equiv \frac{1}{\sigma^2} U_{xx}, \qquad S_{yy} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{u_i^2} \equiv \frac{1}{\sigma^2} U_{yy}$$

$$\Delta = \frac{1}{S S_{xx} - S_x^2} = \frac{\sigma^4}{U U_{xx} - U_x^2} \equiv \sigma^4 \delta$$

MNK - przypadek liniowy

Estymatory parametrów linii prostej oraz ich macierzy kowariancji:

$$\hat{\theta}_1 = (U_{xx}U_y - U_x U_{xy})\delta, \quad \hat{\theta}_2 = (U U_{xy} - U_x U_y)\delta$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\vec{y} - \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2\vec{x})^{\mathrm{T}} \tilde{\mathrm{V}}^{-1} (\vec{y} - \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2\vec{x})}{n-2}$$

$$\hat{\mathrm{V}}\left[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right] = \begin{bmatrix} U_{xx}\hat{\sigma}^2\delta & -U_x\hat{\sigma}^2\delta \\ -U_x\hat{\sigma}^2\delta & U\hat{\sigma}^2\delta \end{bmatrix}$$

W zależności od stanu wiedzy o błędach s_i należy odpowiednio wybrać u_i:

- stały błąd bezwzględny: $s_i = \sigma \quad \Rightarrow \quad u_i = 1$
- stały błąd względny: $s_i = \sigma y_i \quad \Rightarrow \quad u_i = y_i$
- Rozważmy zmianę zmiennych: $y = \dfrac{x}{ax+b}, \quad z = \dfrac{1}{y} = a\dfrac{1}{x} + b = ax' + b \quad \Rightarrow \quad \sigma_z = \dfrac{\sigma_y}{y^2}$

  stały błąd bezwzględny: $\sigma_z = s_i \dfrac{1}{y_i^2} \quad \Rightarrow \quad u_i = \dfrac{1}{y_i^2}$

  stały błąd względny: $\sigma_z = \dfrac{s_i}{y_i}\dfrac{1}{y_i} \quad \Rightarrow \quad u_i = \dfrac{1}{y_i}$

- Rozważmy przypadek skorelowanych pomiarów tej samej wielkości, $\eta(x) = \theta$.

$$\mathcal{R} = \left(\vec{y} - \Phi\vec{\theta}\right)^{\mathrm{T}} \mathrm{V}^{-1} \left(\vec{y} - \Phi\vec{\theta}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} (y_i - \theta)\mathrm{V}_{ij}^{-1}(y_j - \theta) = \min(\theta)$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta} = \sum_{i,j=1}^{n} 2\theta\mathrm{V}_{ij}^{-1} - y_i\mathrm{V}_{ij}^{-1} - y_j\mathrm{V}_{ij}^{-1} = 2\theta \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{V}_{ij}^{-1} - 2\sum_{i,j=1}^{n} y_i\mathrm{V}_{ij}^{-1}$$

MNK - przypadek liniowy - pomiary skorelowane

$$\left.\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta} = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} y_i \mathrm{V}_{ij}^{-1}}{\sum_{k,l=1}^{n} \mathrm{V}_{kl}^{-1}} = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i, \quad w_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \mathrm{V}_{ij}^{-1}}{\sum_{k,l=1}^{n} \mathrm{V}_{kl}^{-1}}$$

$$\langle \hat{\theta} \rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i \langle y_i \rangle = \theta \sum_{i=1}^{n} w_i = \theta$$

$$\mathcal{V}[\hat{\theta}] = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial y_i} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial y_j} \mathrm{V}_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} w_i \mathrm{V}_{ij} w_j = w^{\mathrm{T}} \mathrm{V} w$$

- Przykład: Niech y_1 i y_2 będą dwoma skorelowanymi pomiarami wielkości θ:

$$\mathrm{V} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{V}^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta} = w y_1 + (1-w) y_2, \quad w = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

$$\mathcal{V}[\hat{\theta}] = w^{\mathrm{T}} \mathrm{V} w = \frac{(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

Uwaga 1: Dla $\rho > \sigma_2/\sigma_1$ mamy $w < 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta} \notin (y_1, y_2)$ - dla silnie dodatnio skorelowanych pomiarów z dużym prawdopodobieństwem oba pomiary leżą po tej samej stronie wartości prawdziwej.

MNK - przypadek liniowy - pomiary skorelowane

Uwaga 2: Dla $\rho = \sigma_1/\sigma_2$ (lub $\rho = \sigma_2/\sigma_1$) waga drugiego z pomiarów jest równa zero i nie wpływa on na średnią.

- Definiując błąd skorelowany (np. niepewność świetlności przy pomiarze dwóch przekrojów czynnych w tym samym eksperymencie) jako $\sigma_{\mathrm{C}}^2 = \rho\sigma_1\sigma_2$ wyniki pomiarów można zapisać:

$$\theta = y_1 \pm \sigma_1' \pm \sigma_{\mathrm{C}}, \qquad \theta = y_2 \pm \sigma_2' \pm \sigma_{\mathrm{C}}$$

gdzie $\sigma_1'^2 = \sigma_1^2 - \sigma_{\mathrm{C}}^2$ oraz $\sigma_2'^2 = \sigma_2^2 - \sigma_{\mathrm{C}}^2$.

Zakładając, że $\sigma_{\mathrm{C}} < \sigma_1,\ \sigma_2$ (co oznacza, że wagi $w_{1,2} > 0$) można zapisać:

$$\hat{\theta} = \frac{\dfrac{y_1}{\sigma_1^2 - \sigma_{\mathrm{C}}^2} + \dfrac{y_2}{\sigma_2^2 - \sigma_{\mathrm{C}}^2}}{\dfrac{1}{\sigma_1^2 - \sigma_{\mathrm{C}}^2} + \dfrac{1}{\sigma_2^2 - \sigma_{\mathrm{C}}^2}} = \frac{\dfrac{y_1}{\sigma_1'^2} + \dfrac{y_2}{\sigma_2'^2}}{\dfrac{1}{\sigma_1'^2} + \dfrac{1}{\sigma_2'^2}}$$

$$\mathcal{V}[\hat{\theta}] = \frac{1}{\dfrac{1}{\sigma_1^2 - \sigma_{\mathrm{C}}^2} + \dfrac{1}{\sigma_2^2 - \sigma_{\mathrm{C}}^2}} + \sigma_{\mathrm{C}}^2 = \frac{1}{\dfrac{1}{\sigma_1'^2} + \dfrac{1}{\sigma_2'^2}} + \sigma_{\mathrm{C}}^2$$

- Przykład: Wykorzystując dwa razy ten sam pomiar i zaniedbując korelację zmniejszamy błąd o $\sqrt{2}$. Jeśli poprawnie przyjmiemy, że wówczas $\rho = 1$ to oczywiście taka operacja nie zmniejsza błędu.