

Analiza danych

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 7

Unfolding - sformułowanie problemu

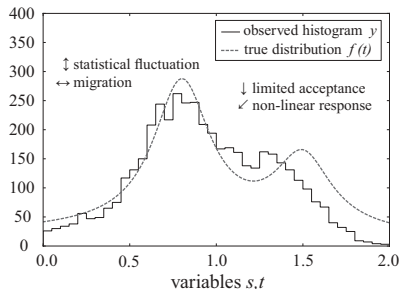
- **Akceptancja (acceptance)** pomiaru to zakres (geometryczny lub kinematyczny) w jakim dana obserwacja może zostać zmierzona w eksperymencie.

Przykłady: pomiar time-of-flight (TOF) cząstki ograniczony przez rozmiary detektora oraz rozdzielczość pomiaru czasu; pomiar pędu cząstki naładowanej z zakrzywienia śladu w polu magnetycznym - wymagany minimalny pęd aby zmierzyć krzywiznę toru.

- **Wydajność (efficiency)** pomiaru zdefiniowana jest jako stosunek oczekiwanych wartości liczb zmierzonych do wyprodukowanych (prawdziwych) "przypadków."

Przykłady: zdarzenia to np. zderzenia proton-proton, produkcja cząstek naładowanych.

- Aby otrzymać rozkłady z poziomu mierzonego, należy uwzględnić odpowiedź detektora (rozdzielczość, wydajność). Konieczna jest **konwolucja** modeli teoretycznych z odpowiednią funkcją reprezentującą odpowiedź detektora.
- Aby usunąć efekty eksperymentalne z rozkładów mierzonych i odzyskać oryginalne rozkłady z poziomu "true," konieczne jest zastosowanie procedury **unfoldingu**.



Unfolding - definicje wielkości pomocniczych

- Rozważmy pomiar obserwabli X (w ogólności X może być wektorem), która przyjmuje wartości prawdziwe x_t i odpowiadające im wartości mierzone x_m :

$$\int_{\Omega_t} f_t(x_t) dx_t = 1, \quad \int_{\Omega_m} f_m(x_m) dx_m = 1, \quad \int_{\Omega_m} f_b(x_m) dx_m = 1$$

- W ogólności pomiarowi mogą towarzyszyć różne rodzaje tła:

$$f_b(x_m) = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} p_\alpha f_{b,\alpha}(x_m), \quad \int_{\Omega_m} f_{b,\alpha}(x_m) dx_m = 1, \quad \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} p_\alpha = 1$$

- Eksperymentalna funkcja odpowiedzi $R(x_m|x_t)$ uwzględnia rozmycie (smearing) mierzonej wielkości $r(x_m|x_t)$ oraz wydajność pomiaru $\epsilon(x_t)$:

$$R(x_m|x_t) = r(x_m|x_t) \times \epsilon(x_t), \quad \int_{\Omega_m} r(x_m|x_t) dx_m = 1$$

- Ze względu na ograniczoną statystykę, w eksperymentach posługujemy się histogramami. Niech $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_M)$, $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_N)$ oraz $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_N)$ oznaczają odpowiednio, rozkłady prawdziwy, mierzony oraz tła.

- Oznaczmy obserwowane w eksperymencie liczby przypadków prawdziwych, mierzonych i tła przez m_{tot} , n_{tot} , b_{tot} , a ich wartości oczekiwane przez:

$$\mu_{\text{tot}} = \mathcal{E}(m_{\text{tot}}), \quad \nu_{\text{tot}} = \mathcal{E}(n_{\text{tot}}), \quad \beta_{\text{tot}} = \mathcal{E}(b_{\text{tot}}), \quad \nu_{\text{tot}} = \langle \epsilon \rangle \mu_{\text{tot}} + \beta_{\text{tot}}$$

Unfolding

- Oczekiwane liczby przypadków w binie j rozkładu wielkości prawdziwej oraz liczb przypadków w binie i w rozkładach wielkości mierzonej i tła dane są przez:

$$\mu_j = \mu_{\text{tot}} \int_{\text{bin } j} dx_t f_t(x_t), \quad \nu_i = \nu_{\text{tot}} \int_{\text{bin } i} dx_m f_m(x_m), \quad \beta_i = \beta_{\text{tot}} \int_{\text{bin } i} dx_m f_b(x_m)$$

- Liczba przypadków ν_i zmierzonych w binie i można zapisać jako:

$$\begin{aligned} \nu_i &= \mu_{\text{tot}} \int_{\Omega_t} dx_t \text{Prob}(x_m \in i | x_t, \text{detected}) \times \text{Prob}(\text{detect } x_t) \times \text{Prob}(\text{produce } x_t) = \\ &= \mu_{\text{tot}} \int_{\text{bin } i} dx_m \int_{\Omega_t} dx_t r(x_m | x_t) \epsilon(x_t) f_t(x_t) \\ &= \mu_{\text{tot}} \int_{\text{bin } i} dx_m \sum_{j=1}^M \int_{\text{bin } j} dx_t r(x_m | x_t) \epsilon(x_t) f_t(x_t) \equiv \sum_{j=1}^M R_{ij} \mu_j \end{aligned}$$

gdzie macierz R_{ij} jest zdefiniowana jako:

$$R_{ij} \equiv \left\{ \text{Prob}(\text{observed in bin } i | \text{true in bin } j) \right\} = \frac{\int_{\text{bin } i} dx_m \int_{\text{bin } j} dx_t r(x_m | x_t) \epsilon(x_t) f_t(x_t)}{\int_{\text{bin } j} dx_t f_t(x_t)}$$

Zależność R_{ij} od $f_t(x_t)$ znika gdy jest w przybliżeniu stała ($f_t(x_{t,j})$) w binach.

- Sumując po wszystkich binach i (mierzonych) otrzymujemy średnią wydajność detekcji:

$$\sum_{i=1}^N R_{ij} = \epsilon_j, \quad \epsilon_j = \frac{\int_{\text{bin } j} dx_t \epsilon(x_t) f_t(x_t)}{\int_{\text{bin } j} dx_t f_t(x_t)}$$

- Uwzględniając w powyższej dyskusji wkład od tła otrzymujemy:

$$\nu_i = \sum_{j=1}^M R_{ij} \mu_j + \beta_i \quad \Rightarrow \quad \vec{\nu} = R \vec{\mu} + \vec{\beta}$$

- $\vec{\nu}$ oznacza wartość oczekiwaną rozkładu mierzonego wokół której fluktuuje rzeczywisty rozkład \vec{n} mierzony. Zastępując $\vec{\nu}$ przez \vec{n} oraz rozwiązując powyższe równanie macierzowe znajdujemy estymatę rozkładu prawdziwego:

$$\mathcal{E}[\vec{n}] = \vec{\nu} \quad \Rightarrow \quad \vec{m} \equiv \hat{\mu} = R^{-1} (\vec{n} - \vec{\beta})$$

Jest to estymator nieobciążony (jeśli tylko poprawnie zostało oszacowane tło):

$$\mathcal{E}[m_j] = \sum_{i=1}^N (R^{-1})_{ji} (\mathcal{E}[n_i] - \beta_i) = \sum_{i=1}^N (R^{-1})_{ji} (\nu_i - \beta_i) = \mu_j$$

- Kowariancja pomiędzy binami rozkładu estymowanego:

$$\text{cov}[m_i, m_j] = \sum_{k, k'=1}^N (R^{-1})_{ik} (R^{-1})_{jk'} \mathbf{V}_{kk'}$$

Metoda bin-by-bin

- W metodzie bin-by-bin zakładamy, że można poprawić dane stosując pojedynczy multiplikatywny czynnik do każdego binu:

$$\mu_i = C_i(n_i - \beta_i), \quad C_i = \frac{\mu_i^{\text{MC}}}{\nu_i^{\text{MC}}}$$

- Porównanie dokładności metody bin-by-bin i unfoldingu.
W przypadku gdy $R_{ij} \approx \delta_{ij}\varepsilon_j$ (macierze w przybliżeniu diagonalna) mamy:

$$\nu_i^{\text{signal}} = n_i - \beta_i = \varepsilon_i \mu_i \quad \Rightarrow \quad C_i = \frac{1}{\varepsilon_i}$$

Jednak w sytuacji gdy R nie jest diagonalna, czynniki $1/C_i$ mogą być dowolnie duże, a estymatory metody bin-by-bin mogą być dowolnie obciążone:

$$\mathcal{E}[\hat{\mu}_i] = C_i \mathcal{E}[n_i - \beta_i] = C_i(\nu_i - \beta_i) = \frac{\mu_i^{\text{MC}}}{\nu_i^{\text{MC}}} \nu_i^{\text{sig}} = \left(\frac{\mu_i^{\text{MC}}}{\nu_i^{\text{MC}}} - \frac{\mu_i}{\nu_i^{\text{sig}}} \right) \nu_i^{\text{sig}} + \mu_i$$

- Macierz kowariancji owikłanych metodą bin-by-bin sygnałów ma postać (przy założeniu braku korelacji pomiędzy n_i i statystyce Poissona):

$$U_{ij} = \text{cov}[\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_j] = C_i^2 \text{cov}[n_i, n_j] = C_i^2 \nu_i^{\text{sig}} \delta_{ij}$$

- Obciążenie metody bin-by-bin: $B_i = \left(\frac{1}{\varepsilon_i^{\text{MC}}} - \frac{1}{\varepsilon_i^{\text{true}}} \right) \nu_i^{\text{sig}}$

Poprawka na skończoną szerokość binu

- Rozkłady eksperymentalne są zwykle rzetelnie przedstawiane w postaci histogramów i dlatego powinny być również poprawiane na uśrednianie po szerokości binu.

$$\mu_j = \mu_{\text{tot}} \int_{\text{bin } j} dx_t f_t(x_t) \quad \Rightarrow \quad f_t(x_j) = \frac{\mu_j}{\Delta x_j \mu_{\text{tot}}}, \quad \Delta x_j = x_{\text{max},j} - x_{\text{min},j}$$

Wybór x_j w środku binu jest ściśle poprawny tylko jeśli rozkład wewnątrz binu jest liniowy. Zawsze istnieje jednak taki punkt $x_{0,i} \in [x_{\text{min},i}, x_{\text{max},i}]$, że zachodzi:

$$\int_{x_{\text{min},i}}^{x_{\text{max},i}} f(x) dx = f(x_i)(x_{\text{max},i} - x_{\text{min},i}) = f(x_{0,i}) \Delta x_i$$

Wartość $x_{0,i}$ zależy od zastosowanego modelu $f_m(x; \vec{a})$:

$$x_{0,i} = f_m^{-1}(I_i / \Delta x_i), \quad I_i = \int_{x_{\text{min},i}}^{x_{\text{max},i}} f_m(x; \vec{a}) dx = f_m(x_{0,i}) \Delta x_i$$

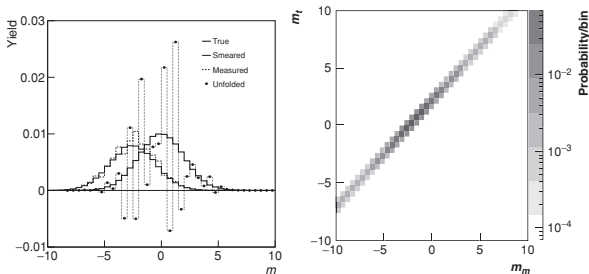
- Przykład: Rozważmy spektrum $\frac{1}{p_T} \frac{dN}{dp_T}$ oraz funkcję $f_m(p_T) = A \left(1 + \frac{p_T}{B}\right)^{-n}$

$$\frac{dN}{dp_T} = p_T f_m(p_T) \quad \Rightarrow \quad I_i = \int_{\text{bin } i} \frac{dN}{dp_T} dp_T = \int_{\text{bin } i} p_T f_m(p_T) dp_T = \langle p_T \rangle_i \int_{\text{bin } i} f_m(p_T) dp_T$$

Po dofitowaniu parametrów A i B wyznaczamy: $p_{T,i} = \frac{\int_{\text{bin } i} p_T f_m(p_T) dp_T}{\int_{\text{bin } i} f_m(p_T) dp_T}$

Unfolding z regularyzacją

- Zastosowanie macierzy odwrotnej $(R_{ij})^{-1}$ do unfoldingu w prawdziwym eksperymencie ze względu na skończoną statystykę prowadzi zwykle do silnych niefizycznych oscylacji.



- Można pokazać, że estymator $\hat{\mu} = R^{-1}(\vec{n} - \vec{\beta})$ odpowiada rozwiązaniu problemu MNK gdzie

$$\chi^2(\vec{\mu}) = \sum_{i,j=1}^N (\nu_i - n_i)(V_{ij})^{-1}(\nu_j - n_j)$$

lub rozwiązaniu MNW dla $\mathcal{L}(\mu) = \prod_{i=1}^N Poi(n_i | \nu_i)$ gdzie ν_i traktujemy jako funkcje parametrów μ_j .

- Istnieje możliwość uniknięcia problemów z odwracaniem macierzy R poprzez wprowadzenie **funkcji regularyzacyjnej** która efektywnie prowadzi do wygładzenia unfoldowanego rozkładu.
- Zastosowanie funkcji regularyzacyjnej oznacza zgodę na rozwiązanie $\vec{\mu}$ które odbiega od optymalnego ($\chi^2 = \chi_{\min}^2 + \Delta\chi^2$ lub $\ln \mathcal{L}(\vec{\mu}) = \ln \mathcal{L}_{\max} - \Delta \ln \mathcal{L}$).

- Odpowiednia procedura wykorzystująca regularyzację do rozwiązania problemu unfoldingu zasotała zaproponowana w A. Höcker, V. Kartvelishvili, SVD approach to data unfolding, Nucl. Instrum. Meth. A 372 (1996) 469-481, arXiv:hep-ph/9509307.

- Rozkład macierzy wg wartości osobliwych (Singular Value Decomposition, SVD):

$$A_{m \times n} = U_{m \times m} S_{m \times n} V_{n \times n}^T$$

gdzie U i V to macierze ortogonalne, a S to macierz diagonalna z nieujemnymi wartościami na diagonalu $S_{ij} = s_i \delta_{ij} \geq 0$. s_i to wartości osobliwe, a kolumny macierzy U i V to odpowiednio lewostronne i prawostronne wektory osobliwe.

- SVD można wykorzystać do rozwiązywania układu równań występującego w problemie unfoldingu:

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = A^{-1}\vec{b} = (USV^T)^{-1}\vec{b} = VS^{-1}U^T\vec{b}$$

Rozwiązanie jest dokładne przy założeniu, że A i \vec{b} nie mają błędów.

W praktyce, skończone błędy sprawiają, że elementy diagonalne s_i mogą być bardzo małe i niedokładne dla i powyżej pewnej warkości k .

Właśnie te elementy prowadzą do rozwiązań z oscylacjami, co sprawia, że metoda odracania macierzy odpowiedzi nie działa bez właściwej regularyzacji.

- Rozwiązanie nadokreślonego układu równań $A\vec{x} = \vec{b}$ jest równoważne rozwiązaniu problemu najmniejszych kwadratów:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j - b_i \right)^2$$

jeśli równania są dokładne lub wszystkie błędy na \vec{b} są takie same.

- W przeciwnym wypadku należy uwzględnić błędy na \vec{b} w postaci wag:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j - b_i}{\Delta b_i} \right)^2$$

lub w postaci pełnej macierzy kowariancji, jeśli są one skorelowane:

$$\chi^2 = (A\vec{x} - \vec{b})^T B^{-1} (A\vec{x} - \vec{b})$$

- Ponieważ macierz A pochodzi z symulacji MC, więc rzadkie biny j zawierają mało przypadków, co może skutkować sztucznie zawyżonymi (a jednocześnie mało precyzyjnymi) wartościami A_{ij} (nawet równymi 1), odpowiadającymi za numeryczne fluktuacje.
- Jednoczesne przeskalowanie macierzy A i wektora \vec{x} nie zmienia rozwiązań, a może pomóc ograniczyć fluktuacje:

$$\begin{aligned} A_{ij} &\rightarrow A'_{ij} = \lambda_j A_{ij}, & \text{dla } i = 1, \dots, m \\ x_j &\rightarrow x'_j = x_j / \lambda_j \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n A'_{ij} \omega_j = b_i, \quad \omega_j = x_j / x_j^{\text{mc}}$$

- Macierz kowariancji B może nie być diagonalna, ale jest symetryczna i dodatnio określona, więc:

$$B = QRQ^T \Rightarrow \chi^2 = (A'\vec{\omega} - \vec{b})^T QR^{-1}Q^T (A'\vec{\omega} - \vec{b})$$

- Wprowadzając oznaczenia \tilde{A} i \tilde{b} , otrzymujemy:

$$\tilde{A}_{ij} = \frac{1}{r_i} \sum_m Q_{im} A'_{mj} \quad \chi^2 = (\tilde{A}\vec{\omega} - \vec{b})^T (\tilde{A}\vec{\omega} - \vec{b}) \quad \chi^2 \stackrel{\text{min}}{\Rightarrow} \sum_j \tilde{A}_{ij} \omega_j = \tilde{b}_i$$

$$\tilde{b}_i = \frac{1}{r_i} \sum_m Q_{im} b_m$$

Uwaga: Przeskalowana macierz kowariancji $\tilde{B} \equiv I$, dlatego wszystkie równania mają teraz tą samą wagę.

- Aby zredukować нефизyczne oscylacje w rozwiązaniu, wciąż konieczne jest zastosowanie odpowiedniej **regularyzacji** w wyrażeniu podlegającym minimalizacji:

$$\chi^2 = (\tilde{A}\vec{\omega} - \vec{b})^T (\tilde{A}\vec{\omega} - \vec{b}) + \tau \cdot (C\vec{\omega})^T (C\vec{\omega}) = \min$$

Parametr regularyzacyjny τ określa względną wagę regularyzacji.

Ponieważ oczekujemy "gładkiego" rozwiązania, dlatego macierz C wybieramy tak aby zminimalizować lokalną krzywiznę (kwadrat drugiej pochodnej histogramu):

$$\sum_i [(\omega_{i+1} - \omega_i) - (\omega_i - \omega_{i-1})]^2 \quad \left\{ h_i'' = \frac{h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}}{\Delta^2} \right\}$$

- Minimalizacja χ^2 prowadzi do nadokreślonego układu równań:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} \\ \sqrt{\tau} \mathbf{C} \end{bmatrix} \omega = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{C}^{-1} \\ \sqrt{\tau} \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{C} \omega = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ostatnia postać pozwala uniknąć rozwiązywania iteracyjnego dla różnych τ , i rozwiązać układ tylko dla $\tau = 0$, ale wymaga to odwrócenia macierzy \mathbf{C} , co można zrobić po modyfikacji $\mathbf{C}_{ij} \rightarrow \mathbf{C}_{ij} + \xi \delta_{ij}$ (ξ wybieramy $\sim 10^{-3}$ lub 10^{-4}).

- Dla $\tau = 0$ można napisać: $\mathbf{U}^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{V}^T \vec{\omega} = \mathbf{U}^T \tilde{\mathbf{b}} \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \mathbf{S} \vec{z} = \vec{d}$

a stąd otrzymujemy: $z_i^{(0)} = \frac{d_i}{s_i}$ $\vec{\omega}^{(0)} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{V} \vec{z}^{(0)}$

- Można pokazać, że dla $\tau > 0$: $d_i^{(\tau)} = d_i \frac{s_i^2}{s_i^2 + \tau}$ $z_i^{(\tau)} = \frac{d_i s_i}{s_i^2 + \tau}$
 $\vec{\omega}^{(\tau)} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{V} \vec{z}^{(\tau)}$

- Macierze kowariancji: $\mathbf{Z}_{ik}^{(\tau)} = \frac{s_i^2}{(s_i^2 + \tau)^2} \delta_{ik}$ $\mathbf{W}^{(\tau)} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{Z}^{(\tau)} \mathbf{C}^{-1}$

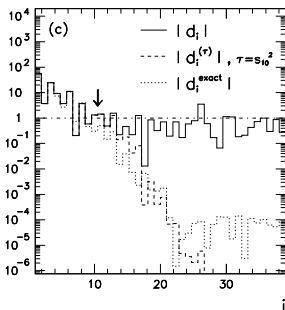
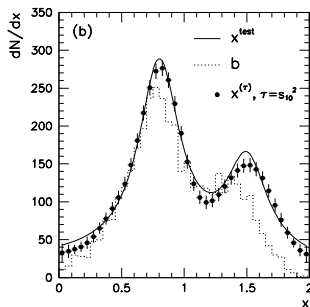
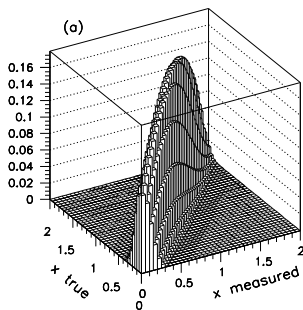
Rozwiązania problemu odwrotnego: $x_i^{(\tau)} = x_i^{\text{mc}} \omega_i^{(\tau)}$ $X_{ik}^{(\tau)} = x_i^{\text{mc}} \mathbf{W}_{ik}^{(\tau)} x_k^{\text{mc}}$

Przykład unfoldingu SVD z regularyzacją

- Wybór wartości parametru regularyzacyjnego τ :

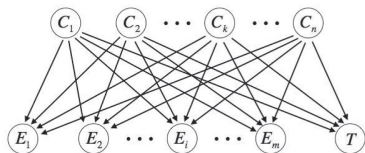
Współczynniki d_i maleją ze wzrostem i , aż do wartości $i = k$, powyżej której zaczynają oscylować lub pozostają stałe, ze względu na duże błędy statystyczne.

Parametr τ wybieramy równy k -tej wartości osobliwej: $\tau = s_k^2$.



- Technika unfoldingu wykorzystująca twierdzenie Bayesa została zaproponowana w G. D'Agostini, *A Multidimensional unfolding method based on Bayes' theorem*, Nucl. Instrum. Meth. A 362 (1995) 487-498.

- Sieć Bayesowska:** n węzłów C_i reprezentuje "przyczyny" μ_i , które chcemy określić za pomocą unfoldingu, na podstawie m węzłów E_j , które są "efektami" odpowiadającymi mierzonym n_j .



Węzeł T reprezentuje niewydajność - część każdego przypadków z każdego C_i nie jest mierzona i trafia do T .

- Macierz odpowiedzi $R_{ji} \equiv P(E_j|C_i, I)$ jest wyznaczana w oparciu o symulacje MC (ograniczona statystyka). I oznacza wszelką dodatkową wiedzę o pomiarze.
- Ze względu na skończoną statystykę, proces unfoldingu ma również naturę statystyczną, a odwracanie macierzy R ma sens jedynie w granicy wielkich liczb:

$$\mathcal{E}[n_j|\mu_i] = P(E_j|C_i, I)\mu_i = R_{ji}\mu_i \Rightarrow \mathcal{E}[n_j|\vec{\mu}] = \sum_{i=1}^n R_{ji}\mu_i \Rightarrow \mathcal{E}[\vec{n}] = R\mathcal{E}[\vec{\mu}]$$

- Twierdzenie Bayesa:

$$P(\vec{\mu}|\vec{n}, R, I) = \frac{P(\vec{n}|\vec{\mu}, R, I)P(\vec{\mu}|I)}{\sum_{\vec{\mu}'} P(\vec{n}|\vec{\mu}', R, I)P(\vec{\mu}'|I)}$$

- Zapisujemy twierdzenie Bayesa w postaci i definiujemy θ_{ij} :

$$P(C_i|E_j, I) = \frac{P(E_j|C_i, I)P(C_i|I)}{\sum_{k=1}^m P(E_j|C_k, I)P(C_k|I)} = \frac{R_{ji}P(C_i|I)}{\sum_{k=1}^m R_{jk}P(C_k|I)} \equiv \theta_{ij}$$

Uwaga: Jeśli nie mamy lepszej informacji, to jako $P(C_i|I)$ można wszystkim binom przypisać jednakowe p-two. Innym wyborem może być po prostu rozkład mierzony.

- Znając p-twa θ_{ij} można rozdzielić n_j przypadków z binu E_j pomiędzy binami C_i i w ten sposób oszacować liczby przypadków na poziomie true:

$$\mu_i|_{n_j} = P(C_i|E_j, I) n_j = \theta_{ij} n_j$$

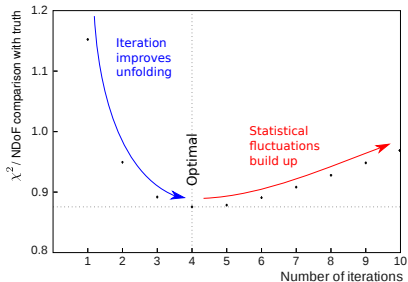
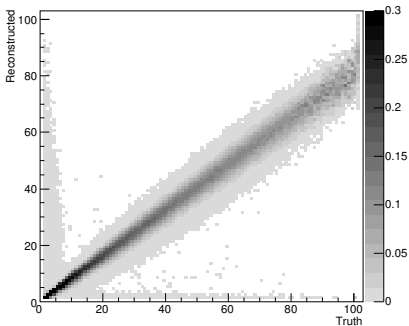
Sumując po wszystkich binach oraz uwzględniając wydajności pomiarowe mamy:

$$\mu_i|_{\bar{n}} = \frac{1}{\varepsilon_i} \sum_{j=1}^N \theta_{ij} n_j, \quad \varepsilon_i = \sum_{j=1}^N P(E_j|C_i, I) = \sum_{j=1}^N R_{ji} = 1 - R_{N+1,i}$$

Współczynniki $R_{ji} \approx n_j^{\text{MC}} / \mu_i^{\text{MC}}$ wyznaczamy z symulacji MC.

- Powyższy algorytm zwykle powtarzany jest iteracyjnie. Można wprowadzić także regularyzacje i wygładzanie rozkładów.

Bayesian unfolding - przykład



B. Wynne, Imagiro: an implementation of Bayesian iterative unfolding for high energy physics, arXiv:1203.4981 [physics.data-an]

