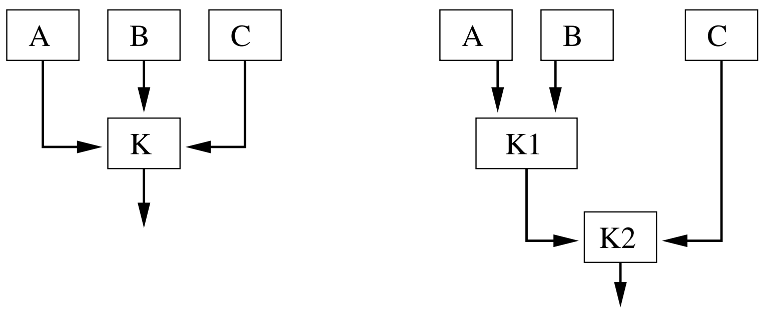
Zestaw 2 / Metody analizy danych:

1. (RN 2.4.1) Trzy liczniki A, B, i C można połączyć w układ koincydencyjny na dwa sposoby przedstawione na rysunku. Przyjmijmy, że każdy z liczników oświetlany jest niezależnym źródłem i rejestruje różne częstości zliczeń f_A, f_B i f_C. Długość impulsu na wyjściu każdego z liczników jest taka sama i wynosi T. Długość impulsu na wyjściu układu koincydencyjnego $K1$ pierwszego stopnia także wynosi T. Dla którego z układów częstość koincydencji przypadkowych jest mniejsza? Ile różnych układów koincydencyjnych można zbudować dla czterech liczników i ile wynoszą częstości koincydencji przypadkowych dla każdego z nich?



2. (RN 2.7.8) Niech przy zadanym czasie oczekiwania t liczba k zdarzeń podlega rozkładowi Poissona $\mathcal{P}_k(\mu t)$. Znajdź rozkład P_k liczby tych zdarzeñ, jeśli czas oczekiwania t podlega rozkładowi wykładniczemu $\mathcal{E}(t;\tau)$.

   Odp. $P_k = \mathcal{G}_{k+1}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k$

3. (RN 2.7.17) Dana jest suma $t = t_1 + t_2 + ... + t_k$ liczby k zmiennych losowych t_i, każda z rozkładu wykładniczego $\mathcal{E}(t;\lambda)$ o tym samym parametrze λ. Jakiemu rozkładowi podlega ta suma, jeśli liczba k składników podlega rozkładowi geometrycznemu $\mathcal{G}_k(p)$ z parametrem p?

   Odp. $\mathcal{E}(t;\lambda p) = \lambda p \exp(-\lambda p t)$

4. (RN 3.1.9) Znajdź wartość oczekiwaną $\langle E\rangle$ energii neutronów powstałych w procesie spontanicznego podziału jądra, jeśli funkcją rozkładu energii emitowanych neutronów jest

$$f(E;\lambda) \propto \sqrt{E}\exp(-\lambda E), \qquad E \geqslant 0, \quad \lambda > 0$$

   Odp.$f(E;\lambda) = \frac{2\lambda\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{E}\exp(-\lambda E), \qquad \langle E\rangle\frac{3}{2\lambda}$

5. (RN 3.1.12) Krew oddawaną w stacji krwiodawstwa można badać oddzielnie dla każdego krwiodawcy, co przy badaniu n próbek wymaga przeprowadzenia n oddzielnych analiz. Można jednak zmieszać krew od k dawców i ją zbadać. Jeśli spełnia warunki, to ta jedna analiza wystarcza dla całej grupy dawców. Jeśli wynik badania nie spełnia warunków, to trzeba przeprowadzić k oddzielnych

badań, co daje łącznie $k+1$ analiz. (a) Jaka jest oczekiwana liczba $\langle m \rangle$ badań krwi dla grupy n osób, jeśli badanie będziemy prowadzili według podanego wyżej sposobu, jeśli typowo jedna osoba na N zgłaszających się do stacji krwiodawstwa cierpi na choroby, które wykluczają wykorzystanie jej krwi? (b) Jaka jest optymalna wartość k_{opt} liczby k, jeśli N wynosi 50, i ile typowo będziemy musieli wykonać analiz?

Odp. (a) $\langle m \rangle = n\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^k+\frac{1}{k}\right)$, (b) $k_{opt}=8$, a typowa liczba analiz to (około) $0.27n$.

6. (RN 3.1.21) Ile wynosi wartość oczekiwana n-tej potęgi dystrybuanty $F(x)$ dowolnej ciągłej zmiennej losowej x?
   Odp. $\langle F^n(x) \rangle = \frac{n}{n+1}$

7. (RN 3.2.4) Ile wynosi wariancja dystrybuanty $F(x)$ dowolnej, ciągłej zmiennej losowej x?
   Odp. $\mathcal{V}[F(x)] = 1/12$.

8. (RN 3.2.1) Rozkład $f(\vec{p})$ pędu $\vec{p}$ nukleonu w jądrze ^4He ma postać

$$f(\vec{p}) \propto \exp\left(-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2p_0^2}\right)$$

   gdzie $p_0 \approx 10$ MeV/c. Znajdź wartość oczekiwaną długości wektora pędu i jego dyspersję.
   Odp. $\langle p \rangle = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}p_0 \approx 16$ MeV/c, $\mathcal{D}[p] = \sqrt{\frac{3\pi-8}{\pi}}p_0 \approx 6.7$ MeV/c