

### Zestaw 3 / Metody analizy danych (6.04.22):

1. (RN 3.3.7) Niech niezależne statystycznie zmienne  $x$  oraz  $y$  mają dyspersje  $\sigma_x$  oraz  $\sigma_y$ . Znajdź współczynnik korelacji między zmienną  $u = x + y$  oraz  $v = x - y$ .

$$\text{Odp. } \rho(u, v) = \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

2. (RN 3.3.8) Niech trzy niezależne statystycznie zmienne  $x$ ,  $y$  oraz  $z$  mają dyspersje  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  oraz  $\sigma_z$ . Znajdź współczynnik korelacji między zmienną  $u = x + z$  oraz  $v = y + z$ .

$$\text{Odp. } \rho(u, v) = \frac{\sigma_z^2}{\sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_z^2)(\sigma_y^2 + \sigma_z^2)}}$$

3. (RN 3.4.10) Stosunek  $f$  amplitudy napięcia na wyjściu filtru górnoprzepustowego do amplitudy napięcia wejściowego zadany jest związkiem:

$$f(\omega) = \frac{k\omega}{\sqrt{1 + k^2\omega^2}}$$

gdzie  $\omega$  jest częstotliwością napięcia wejściowego, natomiast  $k$  jest parametrem charakteryzującym filtr. Mierzac wartość  $f$  przy dowolnej wartości częstotliwości  $\omega$ , możemy ocenić wartość parametru  $k$ .

a) Znajdź wyrażenie na niepewność  $s_k$  parametru  $k$ , jeśli stosunek  $f$  mierzymy z niepewnością  $s_f$ , natomiast częstotliwość  $\omega$  mierzymy wystarczająco dokładnie (przyczynki do niepewności  $s_k$  wynikający z niepewności oceny częstotliwości jest zaniedbywalny w stosunku do przyczynki wynikającego z niepewności oceny stosunku  $f$ ).

b) Naszkicuj wykres zależności niepewności  $s_k$  od częstotliwości  $\omega$  (pamiętaj, że zmiana częstotliwości powoduje zmianę stosunku  $f$ ).

c) Przy jakiej wartości częstotliwości  $\omega_0$  niepewność względna wyznaczonego parametru  $k$  jest najmniejsza?

d) Jeśli będziemy wyznaczać parametr  $k$  przy częstotliwości  $\omega_0$ , z jaką dokładnością wyznaczymy wtedy ten parametr?

$$\text{Odp. a) } s_k = \frac{(1 + k^2\omega^2)^{1/2}}{\omega} s_f, \quad \text{c) } \omega_0 = 1/(\sqrt{2}k), \quad \text{d) } \frac{s_k}{k} = \frac{3\sqrt{3}}{2} s_f$$

4. (RN 3.4.16) Znajomość kąta  $\theta$ , pod którym światło emitowane jest przez cząstkę w liczniku Czerenkowa wypełnionym ośrodkiem o współczynniku załamania  $n$ , pozwala wyznaczyć prędkość

$$\beta = \frac{1}{n \cos \theta}$$

cząstki podróżującej przez ten ośrodek. Kąt  $\theta$  mierzymy z niepewnością  $s_\theta$ , a współczynnik załamania znamy z niepewnością  $s_n$ . Przeanalizuj możliwe wartości niepewności  $s_\theta$ ,  $s_n$  oraz prędkości  $\beta$ , które dopuszczają wykonanie optymalnego (z najmniejszą możliwą niepewnością) pomiaru prędkości  $\beta$  cząstki.

5. (RN 3.5.2) Rozważ rozkład dwóch zmiennych losowych  $x$  oraz  $y$  określony na kwadracie  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ :

$$f(x, y) \propto x^2 + y^2, \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

Znajdź rozkłady warunkowe i krzywe regresji pierwszego typu. Naszkicuj te krzywe wraz z prostymi regresji drugiego typu.

Od. Rozkład warunkowy  $f(y|x) = \frac{3(x^2 + y^2)}{1 + 3x^2}$ , krzywa regresji pierwszego typu

$$\mathcal{E}[y|x] = \frac{3(1 + 2x^2)}{4(1 + 3x^2)}.$$

6. Dwaj studenci wykonali niezależnie pomiar tej samej wielkości fizycznej  $w$ . Student  $A$  otrzymał jako wynik  $w_A = 1.0 \pm 0.4$ , a student  $B$  otrzymał  $w_B = 2.3 \pm 0.3$ . Następnie obaj studenci spotkali się, wymienili rezultaty pomiarów i przeprowadzili następujące rozumowanie: jeśli mierzona była ta sama wielkość fizyczna, to stosunek  $f$  wyników pomiarów powinien być, w ramach trzech standardowych odchyłeń, równy jedności. Student  $A$  obliczył, że  $f_A = w_A/w_B = 0.43 \pm 0.18$  i stwierdził, że stosunek jest różny od jedności o więcej niż trzy standardowe odchylenia, w wyniku czego uznał, że obaj mierzyli różne wielkości fizyczne. Natomiast student  $B$  znalazł, że  $f_B = w_B/w_A = 2.3 \pm 0.97$  i stwierdził, że otrzymany stosunek niewątpliwie zgodny jest, i to z dobrym zapasem, z jednością w ramach trzech standardowych odchyłeń, a tym samym uznał, że obaj mierzyli tę samą wielkość fizyczną. Odtwórz rachunek niepewności wykonany przez studentów i rozstrzygnij, który z nich miał rację. Odpowiedź uzasadnij i wyjaśnij przyczynę sprzeczności konkluzji studentów.