Zestaw 4 / Metody analizy danych (13.04.22):

1. (RN 4.2.4) Wykaż słuszność następującego związku:
$$\mathcal{E}\left[(\bar{x}-\mu)\left(s_x^2-\sigma^2\right)\right]=\frac{1}{n}\mathcal{E}\left[(x-\mu)^3\right]$$

2. (RN 4.2.10) Dane są dwie próbki proste x_i $(i=1,2,...,n)$ oraz y_i $(i=1,2,...,m)$ wzajemnie niezależnych statystycznie zmiennych, pochodzących z tego samego rozkładu. Znajdź odchylenie standardowe s_u dla różnicy u między średnią arytmetyczną próbki łącznej i taką średnią dla próbki x_i.
Odp. $s_u^2=\left(\frac{m}{n+m}\right)^2(s_{\bar{x}}^2+s_{\bar{y}}^2)$

3. (RN 4.3.3) Dla wielkości $A=\alpha+\beta p+\gamma q$, gdzie α, β oraz γ to znane stałe, natomiast p i q to nieznane parametry, znaleziono dwa estymatory: $A_1=\alpha+\beta x_1+\gamma y$ oraz $A_2=\alpha+\beta x_2+\gamma y$. Wielkości x_1 i x_2 są niezależnymi statystycznie od siebie i od wielkości y i nieobciążonymi estymatorami parametru p o identycznej dyspersji σ_x. Podobnie, wielkość y jest nieobciążonym i niezależnym statystycznie od wielkoci x_i estymatorem parametru q o dyspersji σ_y. Dobierz tak stałe a i b w wyrażeniu $A^\star=aA_1+bA_2$, aby statystyka $A^\star$ była nieobcią .zonym estymatorem wielkości A o możliwie najmniejszej wariancji. Ile ta wariancja wynosi?
Odp. $a=b=\frac{1}{2}$, $V[A^\star]=\frac{1}{2}\beta^2\sigma_x^2+\gamma^2\sigma_y^2$.

4. (RN 4.4.2) Dana jest n-elementowa próba prosta par (x_i,y_i). Znajdź współczynnik korelacji $\rho(\bar{x},\bar{y})$ między średnimi arytmetycznymi zmiennych x oraz y, jeśli znane są wartości oczekiwane μ_x, μ_y, dyspersje σ_x, σ_y, i współczynnik korelacji ρ między tymi zmiennymi. Znajdź także współczynnik korelacji $\rho(\bar{x},R)$ między jedną ze średnich arytmetycznych, np. $\bar{x}$, a kowariancją R z próby.
Odp. $\rho(\bar{x},\bar{y})=\rho(x,y)$.

5. (RN 4.4.3) Wielkości x i y to nieobcią .zone, obarczone dyspersjami σ_x oraz σ_y oraz skorelowane ze sobą współczynnikiem korelacji ρ, dwa estymatory parametru μ. Dobierz tak stałe a i b, by wielkość $z=ax+by$ była nieobcią .zonym, o możliwie najmniejszej wariancji, estymatorem parametru μ. Znajdź tę wariancję.
Odp. $a=\frac{\sigma_y^2-\sigma_x\sigma_y\rho}{\sigma_x^2-2\sigma_x\sigma_y\rho+\sigma_y^2}$, $\quad b=\frac{\sigma_x^2-\sigma_x\sigma_y\rho}{\sigma_x^2-2\sigma_x\sigma_y\rho+\sigma_y^2}$, $\quad V[z]=\frac{\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}{\sigma_x^2-2\sigma_x\sigma_y\rho+\sigma_y^2}$.

6. (RN 5.2.31) Znajdź nieobciążony estymator u parametru p^2 rozkładu dwumianowego.
Odp. $u=\frac{k(k-1)}{n(n-1)}$

7. (RN 5.4.34) Dokonujemy pomiaru czasu życia τ jąder promieniotwórczych w próbce zawierającej skończoną ich liczbę metodą zliczania rozpadów w dwóch przedziałach czasowych: jednego trwającego od umownej chwili $t=O$ do chwili

$t = T$ i drugiego, następującego bezpośrednio po pierwszym i trwającego do chwili $t = 2T$. W pierwszym przedziale czasu zarejestrowano k, a w drugim m rozpadów.
a) Znajdź z tych danych estymator czasu życia τ i jego błąd.
b) Jak długi powinien być czas T, aby błąd względny zmierzonego czasu życia był minimalny?
c) Ile ten błąd względny wynosi w warunkach optymalnego czasu trwania pomiaru?
d) Jaką łączną liczbę $k + m$ przypadków musimy zebrać, aby błąd ten wynosił 5%?

Odp. a) $\hat{\tau} = \frac{T}{\ln(k/m)}\left(1 \pm \frac{1}{\ln(k/m)}\sqrt{\frac{1}{k} + \frac{1}{m}}\right)$ **b)** $T_{opt} = 2.45\tau$

c) $s_{\hat{\tau}} \approx \frac{1.51}{\sqrt{k_{opt} + m_{opt}}}\hat{\tau}_{opt}$ **d)** $k_{opt} + m_{opt} = 912$