Zestaw 5 / Metody analizy danych (20.04.22):

1. (RN 5.2.28 i 7.1.3) Rozkład kątowy fermionów produkowanych w procesie anihilacji e^+e^- opisany jest funkcją gęstości

$$f(x;\theta) = \frac{3}{8}(1+x^2) + \theta x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

gdzie θ jest parametrem określonym przez teorię, $x = \cos\vartheta$ oraz ϑ jest kątem między fermionem padającym i wyprodukowanym. Jeśli w eksperymencie obserwujemy łącznie n przypadków, wśród których liczba emitowanych fermionów do przodu ($x \geqslant O$) wynosi f, a w pozostałych $b = n - f$ przypadkach fermion jest wysyłany do tyłu ($x < O$), to możemy utworzyć wielkość $A = (f-b)/(f+b)$, zwaną asymetri˙
a) Jaki zakres wartości może przyjmować parametr θ?
b) Znajdź związek między asymetrią a parametrem θ rozkładu.
c) Jak dokładnie potrafimy wyznaczyć parametr θ?
d) Jaką liczbą n przypadków musimy dysponować, aby na poziomie trzech standardowych odchyleń wykluczyć zerową wartość parametru θ, jeśli ocenia się, że jego wartość wynosi 0,15?
e) Zastosuje metodę momentów do znalezienia estymatora parametru θ rozkładu. Znajdź niepewność tego estymatora.
f) Porównaj z wynikiem jaki uzyskamy, wykorzytując zliczanie danych dla $x \geqslant 0$ oraz $x < 0$ (pomiar asymetrii).
g) Ten sam parametr można ocenić, znajdując średnią wartość trzecich potęg wielkości x_i z próby. Znajdź odpowiedni związek i oblicz niepewność tak uzyskanego estymatora.
h) Który z powyższych estymatorów jest najbardziej efektywny?
Odp. a) $-\frac{3}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{3}{4}$ b) $A = \hat{\theta}$ c) $\mathcal{V}\left[\hat{\theta}\right] = \frac{1}{n}(1-\theta^2)$ d) $n = 391$
e) $\hat{\theta} = \frac{3}{2}\bar{x}$ $\mathcal{V}\left[\hat{\theta}\right] = \frac{1}{n}\left(\frac{9}{10} - \theta^2\right)$
f) Jeśli przez k oznaczymy liczbę przypadków, dla których spełniony jest warunek $x \geqslant 0$, to $\hat{\theta} = \frac{2k-n}{n}$, $\mathcal{V}\left[\hat{\theta}\right] = \frac{1}{n}(1-\theta^2)$
g) $\hat{\theta} = \frac{5}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3$, $\mathcal{V}\left[\hat{\theta}\right] = \frac{1}{n}\left(\frac{25}{21} - \theta^2\right)$

2. (RN 5.2.29) Pragniemy zmierzyć wartość współczynnika pochłaniania μ promieniowania przy jego przejściu przez materię. Aby tego dokonać, kierujemy znaną liczbę n cząstek promieniowania na płytkę materii (tarczę) o znanej grubości d i mierzymy liczbę k cząstek za tarczą.
a) Jakiemu rozkładowi podlega liczba k cząstek za tarczą?
b) Znajdź estymator wielkości μ, wiedząc, że z uwagi na statystyczny charakter procesu pochłaniania promieniowania w materii oczekiwana liczba $\langle k \rangle$ cząstek, które pojawią się po drugiej stronie tarczy, określona jest związkiem

$\langle k \rangle = n \exp(-\mu d)$.
c) Znajdź błąd względny estymatora wielkości μ.
d) Zastanów się nad jego zależnością od grubości tarczy. Przy jakiej grubości d_{opt} tarczy należy wykonać pomiar współczynnika pochłaniania, aby błąd względny tego pomiaru był minimalny? Ile wynosi ten błąd? Przyjmij, że grubość d absorbera znana jest ściśle.
Odp. b) $\hat{\mu} = -\frac{1}{d} \ln \hat{p} = -\frac{1}{d} \ln \frac{k}{n}$, c) $\frac{s_{\hat{\mu}}}{\hat{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\frac{1-\hat{p}}{\hat{p} \ln^2 \hat{p}}}$,
d) $d_{opt} \approx \frac{1.61}{\mu}$, $s_{\hat{\mu}} \approx \frac{1.24\hat{\mu}}{\sqrt{n-1}}$.

3. (RN 4.2.2) Pokaż, że dla prostej próby zmiennych losowych x_i $(k = 1, 2, ..., n)$ wyrażenie:

$$\mathsf{u} = \frac{1}{2n(n-1)} \sum_{i,j=1}^{n} (\mathsf{x}_i - \mathsf{x}_j)^2$$

dostarcza nieobciążonego estymatora wariancji. a) Ile wynosi wariancja tego estymatora?
b) Ile wynosi wariancja tego estymatora jeśli próba pochodzi z rozkładu Gaussa (Wskazówka: dla rozkładu Gaussa $\mu_4 = 3\sigma^4$)?
Odp. a) $\mathcal{V}[u] = \frac{1}{n}\left(\langle (x - \langle x \rangle)^4 \rangle - \frac{n-3}{n-1} \mathcal{V}^2[x] \right)$, b) $\mathcal{V}[u] = \frac{2}{n-1}\sigma^4$

4. (RN 7.2.2) W przedziale czasu $[O; T]$ obserwujemy próbkę wzbudzonych jąder o znanej liczebności. Zmierzyliśmy czasy życia $t_i \leqslant T$, $i = 1, 2, ..., n$ dla wszystkich n rozpadów, które pojawiły się w czasie krótszym niż T, a dla pozostałej liczby m jąder wiemy, że rozpadły się one po upływie czasu T. Znajdź z metody największej wiarogodności estymator stałej rozpadu λ i jego wariancję.
Odp. $\hat{\lambda} = \left(\bar{t} + \frac{m}{n} T \right)$, $\hat{\mathcal{V}}\left[\hat{\lambda}\right] = \hat{\lambda}^2/n$, gdzie $\bar{t}$ jest średnią arytmetyczną czasów t_i.

5. (RN 4.2.7 i 7.2.4) Mezon π_0 może rozpadać się na trzy sposoby: na dwa kwanty gamma $\pi_0 \to \gamma\gamma$, kwant gamma i tzw. parę Dalitza czyli elektron i pozyton $\pi_0 \to \gamma e^+ e^-$, lub też na dwie pary Dalitza $\pi_0 \to e^+ e^- e^+ e^-$. a) W wyniku pomiarów otrzymano następujące częstości rozpoadów: $p_{\gamma D} = (1.198 \pm 0.032) \cdot 10^{-2}$ oraz $p_{DD} = (3.14 \pm 0.30) \cdot 10^{-5}$. Czy mechanizm zastępowania jednego kwantu gamma parą Dalitza działa w rozpadzie π_0 w sposób statystyczny, niezależnie od tego co dzieje się z drugim kwantem gamma? b) Zakładamy że proces konwersji kwantu gamma na parę Dalitza w rozpadzie π_0 jest rzeczywiście statystycznie niezależny od tego co dzieje się z drugim kwantem gamma i zachodzi z prawdopodobieństwem p. Wykonano eksperyment w którym zaobserwowano n przypadków rozpadu mezonu π_0 z częstościami $p_{\gamma D} = 1.198 \cdot 10^{-2}$ oraz $p_{DD} = 3.14 \cdot 10^{-5}$ i reszta do jedności to częstość rozpadu na dwa kwanty gamma. Znajdź estymatę wielkości p i jej błąd. Znajdź wartości, zgodne z przyjętym założeniem, stosunków rozgałęzień i ich pełną macierz błędów.

Odp. a) Tak, w ramach dwóch odchyleń standardowych.

b) $\hat{p} = \left(p_{DD} + \frac{1}{2} p_{\gamma D}\right) \approx 0.0060, \qquad s_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{2n}} \approx \frac{0.055}{\sqrt{n}}$