Zestaw 7 / Metody analizy danych (15.01.09):

1. (RN 7.4.1) Przypuśćmy, że poszukując pewnego bardzo rzadkiego rozpadu cząstki elementarnej, obserwujemy kolejne jej rozpady i interesujące naszdarzenie napotykamy dopiero przy n-tej obserwacji ($n \gg 1$). Znajdź wyrażenia na centralny przedział ufności $[p_-; p_+]$ na poziomie $(1-\alpha)\cdot 100\%$ dla poszukiwanego stosuneku rozgałęzień. Spróbuj określić minimalny przedział ufności na tym samym poziomie, wymagając by stosunek krańców przedziału był jak najbliższy jedności lub ich różnica najbliższa zeru.
   Odp. Przedział centralny: $p_- = 1 - \sqrt[n]{1-\alpha/2}$, $\quad p_+ = 1 - \sqrt[n-1]{\alpha/2}$

2. (RN 7.4.4) Jaką liczbę pomiarów powinniśmy wykonać aby metodą centralnego przedziału ufności na poziomie 99% wykluczyć twierdzenie o braku uprzywilejowania kierunku wiru, jeśli wymyśliliśmy model, według którego woda, spływając z wanny istotnie preferuje obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara i wybiera ten kierunek w 57% przypadków?

3. (RN 7.4.5) Pokaż, że jeśliz ośmiu prób cztery zakończą się porażką i cztery sukcesem, to losowy przedział ufności na poziomie 90% wyznacza zakres wartości parametru p schematy Bernoulliego między 0.19 a 0.81. Porównaj rezultat z tym jaki otrzymujemy z gaussowskiego przybliżenia rozkładu dwumianowego.

4. (RN 7.4.11) Układ liczb x_1, x_2, ..., x_n, o których wiadomo, że pochodzą z rozkładu jednostajnego określonego na przedziale $[\theta - 0.5; \theta + 0.5]$, wylosowano do próby prostej. Wykorzystując wartość średniej arytmetycznej utworzonejz tych liczb i zakładaj ac, że liczba n jest na tyle duża, że możemy zastosować centralne twierdzenie graniczne, znajdź losowy przedział ufności $[\theta_-; \theta_+]$, który z prawdopodobieństwem $1-\alpha$ zawiera nieznany parametr θ.
   Odp. $\theta_- = \bar{x} - z/\sqrt{12n}$, $\quad \theta_+ = \bar{x} + z/\sqrt{12n}$, gdzie $z > 0$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha/2$ rozkładu normalnego.

5. (RN 8.1.1) Formuła Gell-Manna-Okubo przewiduje, że dla mas czterech cząstek elementarnych Σ^0, Λ, n oraz Ξ^0, powinien obowiązywać następujący związek: $2m_\Sigma + 6m_\Lambda = 4m_n + 4m_\Xi$. Eksperymentalnie ustalono, że $m_\Sigma = (1192.55 \pm 0.10)$ MeV/c^2,$m_\Lambda = (1115.63 \pm 0.05)$ MeV/c^2, $m_n = (939.56563 \pm 0.00028)$ MeV/c^2 oraz $m_\Xi = (1314.9 \pm 0.6)$ MeV/c^2. Przeprowadź test słuszności postulowanej formuły na poziomie istotności 0.01.

6. (RN 8.1.2) Tabela podaje zależność prędkości v (w km/s) od odległości R (w megaparsekach) dla dziesięciu pozagalaktycznych obiektów (dane za: K. R. Lang, Astrophysical Formulae, Springer, 1974). a) Znajdź metodą najmniejszych kwadratów prostą $\hat{v} = \hat{a}R + \hat{b}$ dla zależności między obiema wielkościami. b) Przyjmując gaussowski charakter danych, skonstruuj stosowną statystykę Studenta i sprawdź na poziomie istotności 0.05 czy dopuszcza ona prawo Hubble'a $v = HR$. c) Ile wynosi stała Hubble'a H i jej błąd s_H?

Odległość	8	10	19	63	65	66	88	97	113	175
Prędkość	437	1464	1141	5321	4606	4373	4800	5460	6645	10737

   Odp. a) $\hat{v} = (57.0 \pm 5.0)R + (490 \pm 420)$, $\quad$ c) $\hat{H} = (61.7 \pm 3.0)$ km/s/Mp.