

## Zestaw 4 / Szczególna Teoria Względności

1. Cząstka o masie  $m$  porusza się z prędkością  $3c/5$ , natomiast inna cząstka o masie  $m$  pozostaje w spoczynku. a) Znajdź energię i pęd obu cząstek w układzie laboratoryjnym. b) Znajdź prędkość środka masy układu. c) Znajdź energię i pęd obu cząstek w układzie środka masy. d) Sprawdź, że znalezione energie i pędy są związane odpowiednimi transformacjami Lorentza. e) Sprawdź, że wartość  $E_{tot}^2 - p_{tot}^2$  jest taka sama w obu układach.
2. Cząstka ma prędkość  $(u'_x, u'_y)$  w układzie  $S'$ , który porusza się z prędkością  $v$  względem układu  $S$  w kierunku osi  $x$ . Wykorzystaj relatywistyczne prawo dodawania prędkości aby znaleźć prawa transformacyjne dla  $E$  i  $p_x$  oraz pokaż, że  $p'_y = p_y$ . Wskazówka: Pokaż, że  $\gamma_u = \gamma_{u'}\gamma_v(1 + u'_x v)$ , gdzie  $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$  oraz  $u' = \sqrt{u_x'^2 + u_y'^2}$ .
3. W wyniku zderzenia fotonu o energii  $E$  ze spoczywającą cząstką o masie  $m$  powstaje jedna cząstka. Jakie są jej masa i prędkość?
4. Cząstka o masie  $m$  poruszająca się z prędkością  $u = 4c/5$  zderza się z inną cząstką o masie  $m$  znajdującą się w spoczynku. W wyniku zderzenia powstaje foton o energii  $E$  poruszający się w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu pierwotnej cząstki oraz cząstka o masie  $M$  poruszająca się w innym kierunku. Ile wynosi masa  $M$  wyprodukowanej cząstki? Jaka jest maksymalna możliwa energia fotonu  $E$ ?
5. Cząstka o masie  $M$  poruszająca się z prędkością  $3c/5$  rozpada się na cząstkę o masie  $M/4$  i dwa fotony. Jeden z fotonów porusza się w kierunku prostopadłym, natomiast drugi pod kątem  $\theta$  w stosunku do kierunku ruchu pierwotnej cząstki. Cząstka o masie  $M/4$  pozostaje nieruchoma. Ile wynosi kąt  $\theta$ ?
6. Cząstka o masie  $M$  i energii  $E$  zderza się centralnie i elastycznie ze spoczywającą cząstką o masie  $m$ . Pokaż, że końcowa energia cząstki o masie  $M$  jest dana przez:

$$E' = \frac{2mM^2 + E(m^2 + M^2)}{m^2 + M^2 + 2Em}$$

7. Dwie spoczywające cząstki, każda o masie  $m$ , znajdują się w odległości  $x$ . Następnie jedna z cząstek jest przyspieszana stałą siłą  $F$  w kierunku drugiej, aż do momentu zderzenia, w wyniku którego formuje się nowa cząstka. Jak długo trwa ruch przyspieszony cząstki? Jaka jest masa utworzonej cząstki?  
Proszę przy okazji rozwiązania tego zadania znaleźć najpierw ogólne wzory na prędkość, położenie i przyspieszenie cząstki od czasu. Warunki początkowe:  $l(t=0) = 0$  oraz  $v(t=0) = v_0$ .
8. Cząstka o masie  $m$ , znajdującą się początkowo w spoczynku jest przyspieszana stałą siłą  $F$ . Po bardzo długim czasie cząstka osiągnie prędkość bardzo bliską prędkości światła. A więc po tym czasie, cząstka będzie (w przybliżeniu) pozostawała w stałej odległości (mierzonej w układzie laboratoryjnym) za fotonem, który został wyemitowany w chwili  $t = 0$  z miejsca z którego wystartowała cząstka. Pokaż, że ta odległość jest równa  $mc^2/F$ . Wskazówka: W rozwiązaniu tego zadania proszę wykorzystać formuły wyprowadzone w zadaniu poprzednim.
9. Cząstka o masie  $m$  porusza się wzdłuż osi  $x$  pod wpływem siły  $F = -m\omega^2 x$ . Jeśli amplituda ruchu wynosi  $b$ , pokaż, że jego okres dany jest przez

$$T = \frac{4}{c} \int_0^b \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} dx, \quad \text{gdzie} \quad \gamma = 1 + \frac{\omega^2}{2c^2}(b^2 - x^2).$$