Zestaw 7 / Szczególna i Ogólna Teoria Względności

1. Znajdź maksymalną wartość prędkości cząstki (mierzoną przez odległego obserwatora), która porusza się radialnie w kierunku czarnej dziury o masie M, wiedząc, że początkowa prędkości cząstki w bardzo dużej odległości od czarnej dziury wynosiła v_0 i była skierowana radialnie do środka. Dla jakiej wartości promienia r cząstka osiąga tą prędkość?

2. Typowa gwiazda neutronowa ma masę w przybliżeniu równą $M = 1.4M_\odot$ i promień w przybliżeniu równy $r = 10$ km. Cząstka, znajdująca się początkowo w spoczynku w dużej odległości, spada na niewirującą gwiazdę neutronową o powyższych parametrach.
(a) Ile wynosi przyspieszenie grawitacyjne (przewidywane przez mechanikę Newtona) na powierzchni tej gwiazdy?
(b) Z jaką prędkością, mierzoną przez obserwatora znajdującego się na powierzchni gwiazdy, cząstka uderzy w jej powierzchnię?
(c) Ile wynosi ta prędkość z punktu widzenia odległego obserwatora?
(d) Jaką energię kinetyczną na jednostkę masy (mierzoną przez obserwatora znajdującego sie na powierzchni) ma cząstka w momencie uderzenia w powierzchnię gwiazdy?
(e) Ile wynosi prędkość i energia kinetyczna na jednostkę masy cząstki w momencie uderzenia w powierzchnię gwiazdy, zgodnie z mechaniką Newtona?

3. Zaawansowana cywilizacja może wykorzystywać czarne dziury jako źródło energii. W przypadku niewirującej czarnej dziury, możliwa jest zamiana masy w energię w następujący sposób.

   Obiekt o masie m znajdujący się w spoczynku w dużej odległości od czarnej dziury ma energię $E/m = 1$. Z kolei masa m znajdująca sięna powłoce sferycznej o zredukowanym promieniu r_0, ma mniejszą energię daną przez $E/m = (1 - 2M/r_0)^{1/2}$. Dla $r_0 \to 2M$, energia ta dąży do zera. Zbadamy czy jest możliwe 'zrzucenie' masy m w kierunku czarnej dziury i zatrzymanie jej tuż nad horyzontem, tak aby zamienić jej masę na użyteczną formę energii.
(a) Załóżmy, że na sferze o promieniu r_0 została zainstalowana maszyna, która zatrzymuje spadającą masę m i zamienia jej lokalną energię kinetyczną na światło. Jaka ilość energii kinetycznej jest dostępna do zamiany na światło?
(b) Następnie maszyna wysyła uzyskane światło radialnie na zewnątrz. Jaka jest energia tego światła, kiedy dociera ono do miejsca skąd została 'zrzucona' masa m?
(c) Pokaż, że w granicznym przypadku gdy maszyna znajduje sięna horyzoncie, dokładnie cała energia spoczynkowa masy m dociera w postaci światła do miejsca skąd masa m została 'zrzucona'.
(d) Następnie masa zatrzymana przez maszynę zostaje puszczona swobodnie do czarnej dziury. Uzasadnij, że w granicznym przypadku, kiedy maszyna znajduje się dokładnie na horyzoncie, masa czarnej dziury nie wzrasta w wyniku, całej procedury opisanej powyżej.

4. Zegar o masie m znajdujący się w pobliżu czarnej dziury o masie M jest przymocowany do powłoki sferycznej o zredukowanym promieniu r_0. Następnie zegar zostaje zwolniony i wpada radialnie do czarnej dziury.
(a) Pokaż, że prędkości zegara kiedy mija on powłoki sferyczne o mniejszych promieniach r, mierzone przez odległego obserwatora dr/dt oraz przez obserwatorów związanych z powłokami sferycznymi dr_{shell}/dt_{shell} dane sąprzez:

$$\frac{dr}{dt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[\frac{\frac{2M}{r} - \frac{2M}{r_0}}{1 - \frac{2M}{r_0}}\right]^{1/2} \qquad \frac{dr_{shell}}{dt_{shell}} = -\left[\frac{\frac{2M}{r} - \frac{2M}{r_0}}{1 - \frac{2M}{r_0}}\right]^{1/2}$$

   (b) Robot pracujący na sferze o promieniu zredukowanym $r = 40$ km wokół czarnej dziury o masie $M = 5$ km, upuścił śrubokręt. Ile wynosi prędkość śrubokręta kiedy mija sferę o promieniu $r = 25$ km?

5. Astronauta znajduje siępoczątkowo w spoczynku na sferze o promieniu r_0. Następnie zaczyna spadać swobodnie do centrum czarnej dziury. Ile wynosi czas (mierzony przez astronautę) od momentu opuszczenia sfery do momentu dotarcia do centrum? Czas ten osiąga maksimum kiedy skok odbywa sięze sfery tuż nad horyzontem. Ile wynosi ten maksymalny czas (podaj odpowiedź w metrach oraz w sekundach)?

6. Robot znajdujący się na sferze o promieniu r_0 upuszcza narzędzie będące początkowo w stanie spoczynku. Jakie jest początkowe przyspieszenie tego narzędzia?
(a) Wyraź przyspieszenie Newtona na sferze o promieniu r_0 w jednostkach geometrycznych [m^{-1}]. Ile wynosi przyspieszenie ziemskie g_E w tych jednostkach? Ile wynosi to przyspieszenie na powierzchni gwiazdy neutronowej z zadania 1?
(b) Na podstawie wzorów wyprowadzonych w zadaniu 4 znajdź wyrażenie na g_{shell}, tzn. na przyspieszenie na sferze o promieniu r_0 wynikające z OTW.
(c) Oblicz wartość początkowego przyspieszenia narzędzia, które zostało upuszczone ze sfery o promieniu $r_0 = 4M$ w pobliżu czarnej dziury o masie $M = 5000$ m. Wyraź to przyspieszenie jako wielokrotność przypieszenia ziemskiego.
(d) Przypuśćmy, że chcemy 'zawisnąć' w rakiecie tuż nad horyzontem czarnej dziury. Niech to będzie na zredukowanym promieniu $r_0 = 2M + dr$ gdzie $dr \ll 2M$. Znajdź przybliżone wyrażenie na g_{shell} w tych warunkach. Aby pozostać przytomnym przyspieszenie w rakiecie nie może przekroczyć $7g_E$. Niech $dr = 1$ km. Jaka powinna być masa czarnej dziury, którą należy wybrać do takiego manewru. Wyraź masę czarnej dziury w masach Słońca $M_\odot$.

7. Znajdź promienie orbit kołowych (zarówno stabilnych jak i niestabilnych) wokół czarnej dziury o masie M w funkcji momentu pędu (L/m) satelity. Jaki jest minimalny promień stabilnej orbity kołowej? Ile wynosi moment pędu (L/m) satelity na tej orbicie?
Odp. $r = \dfrac{(L/m)^2}{2M}\left[1 \pm \left(1 - \dfrac{12M^2}{(L/m)^2}\right)^{1/2}\right]$

8. Znajdź prędkość satelity na orbicie kołowej w układzie związanym (a) ze sferą o promieniu rórnym promieniowi orbity v_{shell}, oraz (b) z odległym obserwatorem v_{odl}. Ile wynoszą wartości tych prędkości na stabilnej orbicie o minimalnym promieniu?
Odp. $v^2_{shell} = \dfrac{M}{r}\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)^{-1}, \qquad v^2_{odl} = \dfrac{M}{r}$

9. Znajdź wyrażenie wynikające z teorii Newtona na promienie orbit kołowych. Następnie przedstaw relację pomiędzy promieniem Newtona r_{Newt} i promieniem r obliczonym w zadaniu 1 w postaci $r = r_{Newt}(1+q)$ gdzie q jest wielkością małą. Przyjmując warość $q = -0.01$ jako maksymalną wartość przy której przybliżenie Newtona uznamy za dobre, znajdź wyrażenie na minilany promień r_{min} przy którym to przybliżenie jest słuszne. Ile wynosi r_{min} dla Słońca? Ile wynosi wartość q dla Merkurego?

10. Uzasadnij, że wyrażenia na prędkość otrzymane w zadaniu 2 są również słuszne dla niestabilnych orbit kołowych. Ile wynosi prędkość satelity na niestabilnej orbicie kołowej o minimalnym promieniu? Ile wynosi moment pędu (L/m) satelity na tej orbicie?