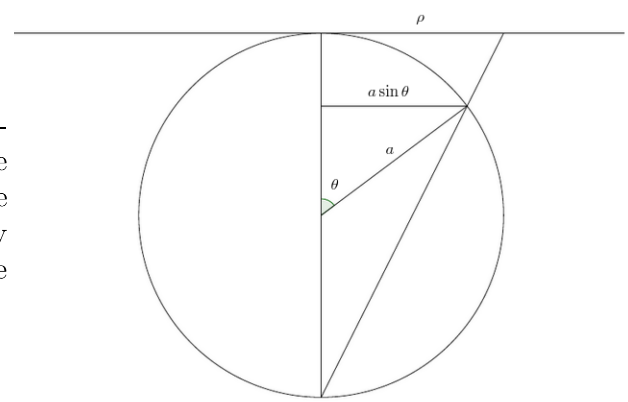
Zestaw 9 / Szczególna i Ogólna Teoria Względności

1. Element linii w ogólnej postaci to $ds^2 = g_{ab}dx^a\, dx^b$. W trójwymiarowej przestrzeni Euklidesowej we współrzędnych kartezjańskich $x^a = (x, y, z)$ przyjmuje postać $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Zapisz elementy linii dla przestrzeni Euklidesowej we współrzędnych sferycznych $x^a = (r, \theta, \phi)$ oraz we współrzędnych cylindrycznych $x'^a = (\rho, \theta, z)$, gdzie $a = 1, 2, 3$. Zidentyfikuj na tej podstawie elementy tensorów metrycznych w tych współrzędnych, odpowiednio $g_{ab}(x)$ i $g'_{cd}(x')$, i przekonaj się, że spełniają one relację:
$$g'_{cd}(x') = g_{ab}(x)\frac{\partial x^a}{\partial x'^c}\frac{\partial x^b}{\partial x'^d}$$
Uwaga: Stosujemy konwencję sumowania Einsteina: sumowania przebiegają po wszystkich powtarzających się indeksach górnym i dolnym; w tym wypadku po indeksach a oraz b.

2. W projekcji stereograficznej każdemu punktowi na powierzchni kuli przypisuje się współrzędne (ρ, ϕ). Współrzędna ϕ jest standardowym kątem biegunowym azymutalnym. Współrzędną ρ każdego punktu uzyskuje się, rysując linię prostą w trzech wymiarach od bieguna południowego kuli przez punkt, o którym mowa, i przedłużając linię do przecięcia płaszczyzny stycznej z biegunem północnym kuli; współrzędna ρ jest wówczas odległością na płaszczyźnie stycznej od bieguna północnego do punktu przecięcia. Pokaż, że element linii dla powierzchni kuli w tych współrzędnych to:
$$ds^2 = \frac{d\rho^2}{(1+\rho^2/a^2)^2} + \frac{\rho^2}{1+\rho^2/a^2}\, d\phi^2$$


W jakich punktach sfery te współrzędne są zdegenerowane? Jeśli zamiast tego pracuje się we współrzędnych kartezjańskich x i y na płaszczyźnie stycznej do bieguna północnego, to jak wtedy wygląda element linii? W jakich punktach sfery te nowe współrzędne są zdegenerowane?

3. Krzywa na powierzchni dwuwymiarowej sfery o promieniu a jest określona parametrycznie przez $\theta = u$, $\phi = 2u - \pi$, gdzie $0 \leqslant u \leqslant \pi$. Wiedząc, że w ogólności długość linii można zapisać jako $L = \int ds = \int \sqrt{|g_{ab}dx^a dx^b|}$ pokaż, że całkowita długość powyższej krzywej dana jest przez:
$$L = a\int_0^{\pi} \sqrt{1 + 4\sin^2 u}\, du$$
Uzasadnij, że długość krzywej nie zależy od parametru użytego do jej opisu.

4. Rozważmy trójwymiarową przestrzeń z elementem linii określonym następująco:
$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - 2\mu/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$
Oblicz następujące wielkości:

a) powierzchnię sfery o promieniu $r = R$,

b) objętość sfery o promieniu $r = R$,

c) odległość w kierunku radialnym pomiędzy sferami o promieniach $r = 2\mu$ i $r = 3\mu$,

d) objętość zawartą pomiędzy sferami z punktu (c).

Wskazówka: N-wymiarową “objętość” w przestrzeni opisanej metryką $g_{ab}(x)$ we współrzędnych ortogonalnych obliczamy korzystając z elementu objętości $d^N V = \int \sqrt{|g_{11}g_{22}...g_{NN}|}dx^1\, dx^2 \ldots dx^N$.

5. Rozważmy dwuwymiarową przestrzeń z elementem długości: $ds^2 = \dfrac{dr^2}{1 - 2\mu/r} + r^2 d\phi^2$.

   Korzystając z relacji $h_{ij} = g_{ab}\dfrac{\partial x^a}{\partial u^i}\dfrac{\partial x^b}{\partial u^j}$, omówionej na wykładzie, pokaż że geometria opisana powyższą metryką może być zanurzona w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesowej, tzn. znajdź równania opisujące powyższą powierzchnię w przestrzeni trójwymiarowej i naszkicuj ją.

   Wskazówka: Ponieważ rozważana powierzchnia dwuwymiarowa opisana jest za pomocą współrzędnych biegunowych (r, ϕ), więc do jej opisu w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesowej warto rozważyć wybór współrzędnych cylindrycznych.

6. Wykonaj rachunki niezbędne do otrzymania symboli Christoffela i elementów tensora Ricciego pojawiających się w wyprowadzeniu metryki Schwarzschilda (wykład slajdy 13-3-4).