

# Wstęp do oddziaływań hadronów

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej  
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 2

# Równanie Schrödingera

Do opisu stanu układu w mechanice kwantowej stosujemy **funkcję falową**  $\Psi(\vec{r}; t)$ . Procedura otrzymania równań kwantowych z równań klasycznych polega na zastąpieniu energii i pędu przez odpowiednie operatory:

$$E \rightarrow \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{oraz} \quad \vec{p} \rightarrow \hat{\vec{p}} = -i\hbar \nabla$$

**Równanie Schrödingera** opisuje ewolucję w czasie funkcji falowej układu w przypadku nierelatywistycznym. Dla cząstki poruszającej się w potencjale  $V(\vec{r})$  opisanej za pomocą hamiltonianu  $H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$ , otrzymujemy

$$H\Psi = E\Psi \quad \Rightarrow \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}; t) + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}; t) = V(\vec{r})\Psi(\vec{r}; t)$$

Dla cząstki swobodnej rozwiązaniem równania Schrödingera jest fala płaska:

$$\Psi(\vec{r}; t) = N e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})}$$

Równania Schrödingera nie można stosować w fizyce cząstek elementarnych, bo nie jest lorentzowsko niezmiennicze oraz nie uwzględnia spinu.

# Równanie Kleina-Gordona

Stosując operatory  $\hat{E}$  oraz  $\hat{p}$  do relatywistycznego związku  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$  otrzymujemy równanie Kleina-Gordona:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \square \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$$

które opisuje propagację relatywistycznej cząstki o masie  $m$  (dla  $m = 0$  dostajemy równanie falowe). Rozwiązanie w postaci fal płaskich dopuszcza istnienie rozwiązań z ujemną energią  $E = \pm \sqrt{p^2 + m^2} -$  **antymateria**.

Dla statycznego potencjału znika w r. K-G zależność funkcji falowej od czasu, a dokonując zmiany  $\psi(r, t) \rightarrow U(r)$  otrzymujemy równanie:

$$\nabla^2 U = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} U$$

Dla potencjału sferycznie symetrycznego zachodzi  $\nabla^2 U(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right)$ , więc rozwiązaniem powyższego równania jest:

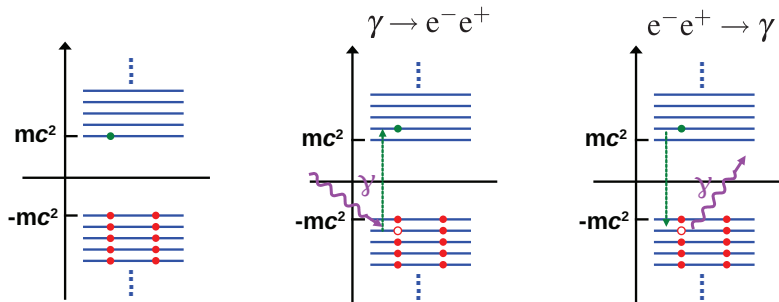
$$U(r) = \frac{g}{4\pi r} e^{-r/R} \quad \text{gdzie} \quad R = \frac{\hbar}{mc}$$

Dla  $R \simeq 1.2$  fm znajdujemy, że  $mc^2 = \hbar c/R = 100$  MeV – w teorii Yukawy jest to masa bozonu odpowiedzialnego za oddziaływanie nukleonów w jądrze (pion)

# Antycząstki

Interpretacja Diraca: próżnia to stan w którym wszystkie stany z  $E < 0$  są zajęte przez dwa elektrony o przeciwnych spinach. Zasada Pauliego uniemożliwia przechodzenie elektronów ze stanów o  $E > 0$  do stanów o  $E < 0$ .

Dziura w normalnie zapełnionych stanach z  $E < 0$  odpowiada energii cząstce o energii  $-E_{dziura} = E_{e^+} > 0$  oraz ładunku  $-q_{e^-} = q_{e^+} > 0$ .



W modelu Diraca prostą interpretację ma kreacja par oraz anihilacja elektron-pozyton.

Pozyton został odkryty w 1931 roku w ciągu reakcji zaobserwowanych w emulsji fotograficznej:  $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$ ,  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ ,  $\gamma \rightarrow e^+e^-$ .

# Przekrój czynny

Rozważmy strumień cząstek  $a$  o gęstości  $n_a$  przechodzący przez tarczę (o polu przekroju  $A$ ) złożoną z cząstek  $b$  o gęstości  $n_b$ .

**Przekrój czynny**  $\sigma$  na oddziaływanie cząstki  $a$  z cząstką  $b$  jest miarą p-twa  $P$  oddziaływania i jest zdefiniowany geometrycznie jako efektywna powierzchnia centrów rozpraszania, tzn.  $P = \sigma/A$ .

W czasie  $\delta t$  przez ustalony przekrój tarczy przejdzie

$$\delta N_a = n_a v \delta t A$$

cząstek typu  $a$ , ale tylko w przypadku części z nich zajdzie oddziaływanie:

$$\delta N_a \cdot P \cdot N_b = n_a v \delta t \sigma N_b$$

gdzie  $N_b = n_b v \delta t A$ .

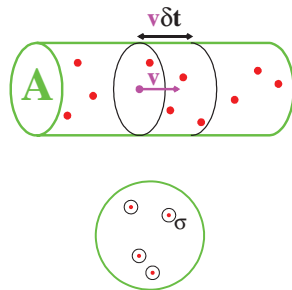
Częstość oddziaływania na cząstkę tarczy jest równa:

$$\Gamma = \frac{1}{N_b} \frac{\delta N_a}{\delta t} = \Phi_a \sigma$$

gdzie  $\Phi_a = n_a v$  to strumień cząstek padających.

Przekrój czynny ma wymiar powierzchni. Stosowaną jednostką jest barn:

$$1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2, \quad 1 \text{ GeV}^{-2} = 0.38938 \text{ mb}$$



Podstawowymi obserwabłami w fizyce cząstek elementarnych są **przekroje czynne na rozpraszanie** i **częstości rozpadu**, które w mechanice kwantowej odpowiadają przejściom pomiędzy stanami.

**Częstość przejść**  $\Gamma_{fi}$  pomiędzy stanami początkowym  $|i\rangle$  i końcowym  $\langle f|$  obliczamy stosując tzw. **złotą regułę Fermiego**:

$$\Gamma_{fi} = 2\pi |M_{fi}|^2 \rho(E_i)$$

gdzie  $M_{fi}$  jest **elementem macierzy przejścia** określonym za pomocą hamiltonianu oddziaływania  $\hat{H}'$  poprzez rozwinięcie perturbacyjne:

$$M_{fi} = \langle f | \hat{H}' | i \rangle + \sum_{j \neq i} \frac{\langle f | \hat{H}' | j \rangle \langle j | \hat{H}' | i \rangle}{E_i - E_j} + \dots$$

natomiast  $\rho(E_i) = \left| \frac{dN}{dE} \right|_{E_i}$  to tzw. gęstość stanów.

**Uwaga:** Element macierzowy zawiera całą fizykę, natomiast gęstość stanów to kinematyka.

# Rozpraszanie w mechanice kwantowej

Rozważmy rozwiązanie równania K-G w postaci fali płaskiej  $\psi = Ne^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})}$  w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń.

- Normalizacja funkcji falowej do jednej cząstki w sześcianie o boku  $a$ :

$$|\psi_i|^2 = N^2 = \frac{1}{a^3} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{1}{a^{3/2}}$$

- El. macierzowy:  $M_{fi} = \langle \psi_f | \hat{H} | \psi_i \rangle = \int \psi_f^* \hat{H} \psi_i d^3\vec{r} = \frac{1}{a^3} \int e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}} V(\vec{r}) d^3\vec{r}$

- Strumień cząstek padających:  $\phi = n_i = \frac{1}{a^3}$

- Gęstość stanów:

Funkcja falowa znika na brzegu sześcianu o boku  $a$

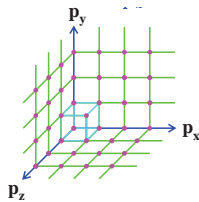
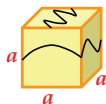
$\Rightarrow$  kwantowanie pędu ( $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ ):

$$p_x = \frac{2\pi n_x}{a}, \quad p_y = \frac{2\pi n_y}{a}, \quad p_z = \frac{2\pi n_z}{a}$$

Objętość pojedynczego stanu w p. pędów  $\left(\frac{2\pi}{a}\right)^3 = \frac{(2\pi)^3}{V}$

Liczba stanów pomiędzy  $p \rightarrow p + dp$ :

$$dn = \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} = \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} V \quad \Rightarrow \quad \rho(E_f) = \left| \frac{dn}{dE} \right|_{E_f} = \left| \frac{dn}{d|\vec{p}|} \frac{d|\vec{p}|}{dE} \right|_{E_f}$$



# Rozpraszanie w mechanice kwantowej

Ponieważ  $d^3\vec{p} = p^2 dp d\Omega$  oraz  $p = \beta E$  więc mamy:  $\rho(E_f) = \frac{E^2 d\Omega}{(2\pi)^3} a^3 \beta^3$

Przekrój czynny jest więc równy (zakładamy, że  $\beta = 1$ ):

$$d\sigma = \frac{1}{\phi_i} 2\pi |M_{fi}|^2 \rho(E_f) = a^3 2\pi \left| \frac{1}{a^3} \int e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) d^2\vec{r} \right|^2 E^2 \left( \frac{a}{2\pi} \right)^3 d\Omega$$

$$\text{A stąd: } \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{E^2}{(2\pi)^2} \left| \int e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) d^2\vec{r} \right|^2$$

**Przykład:** Rozpraszanie na potencjale Yukawy  $V(r) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}$ .

$$M_{fi} = -\frac{g^2}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} \frac{e^{-mr}}{r} r^2 \sin\theta' dr d\theta' d\phi$$

Całkując po  $d\phi$  oraz zmieniając zmienną  $y = \cos\theta'$  dostajemy:

$$M_{fi} = -\frac{g^2}{2} \int_0^\infty \int_{-1}^1 r e^{ipry} e^{-mr} dr dy = -\frac{g^2}{m^2 + |\vec{p}|^2}$$

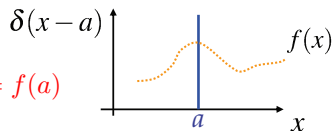
Przekrój czynny jest więc równy:  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{E^2}{(2\pi)^2} \frac{g^4}{(m^2 + |\vec{p}|^2)^2}$



# Funkcja $\delta$ Diraca

Definicja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a) dx = f(a)$$

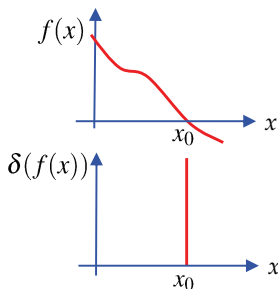


Przykład:  $\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$

Niech  $y = f(x)$  gdzie  $f(x_0) = 0$ , wówczas:

$$\int_{y_1}^{y_2} \delta(y) dy = \int_{x_1}^{x_2} \delta(f(x)) \frac{df}{dx} dx = \begin{cases} 1 & y_1 < 0 < y_2 \\ 0 & \text{pozostałe } y \end{cases}$$

$$\left| \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \int_{x_1}^{x_2} \delta(f(x)) dx = \begin{cases} 1 & x_1 < x_0 < x_2 \\ 0 & \text{pozostałe } x \end{cases}$$



$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(f(x)) dx = \left| \frac{df}{dx} \right|_{x_0}^{-1} \int_{x_1}^{x_2} \delta(x-x_0) dx \Rightarrow \delta(f(x)) = \left| \frac{df}{dx} \right|_{x_0}^{-1} \delta(x-x_0)$$

Przydatna w relatywistycznej mechanice kwantowej w całkach po przestrzeni fazowej. Np. zasady zachowania energii i pędu w procesie rozpadu  $a \rightarrow 1 + 2$ :

$$\int \dots \delta(E_a - E_1 - E_2) dE \quad \text{oraz} \quad \int \dots \delta^3(\vec{p}_a - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) d^3\vec{p}$$

# Złota reguła Fermiego - zastosowanie funkcji $\delta$ Diraca

Gęstość energii stanów końcowych (całkowanie po wszystkich energiach stanu końcowego, zachowanie energii,  $E_f = E_i$ , dzięki  $\delta$  Diraca):

$$\rho(E_f) = \left| \frac{dn}{dE} \right|_{E_f} = \int \frac{dn}{dE} \delta(E - E_i) dE$$

Złota reguła Fermiego przyjmuje postać (całkowanie po wszystkich **dozwolonych** stanach końcowych o **dowolnej energii**):

$$\Gamma_{fi} = 2\pi \int |T_{fi}|^2 \delta(E_i - E) dn$$

Przykład: W rozpadzie dwuciałowym  $a \rightarrow 1 + 2$  wystarczy rozważyć jedną cząstkę ze stanu końcowego (zasada zachowania pędu ustala drugą):

$$\Gamma_{fi} = 2\pi \int |T_{fi}|^2 \delta(E_i - E_1 - E_2) dn = 2\pi \int |T_{fi}|^2 \delta(E_i - E_1 - E_2) \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3}$$

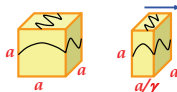
ale można również zastosować dodatkową funkcję  $\delta$  Diraca:

$$\Gamma_{fi} = (2\pi)^4 \int |T_{fi}|^2 \delta(E_i - E_1 - E_2) \delta^3(\vec{p}_i - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3}$$

# Lorentzowsko niezmiennicza przestrzeń fazowa

W nierelatywistycznej mechanice kwantowej normalizacja funkcji falowej do jednej cząstki na jednostkę objętości:  $\int \psi^* \psi dV = 1$ .

Uwzględniając efekty relatywistyczne, element objętości ulega 'skróceniu' o czynnik  $\gamma = E/m$ , czyli gęstość rośnie o czynnik  $\gamma$ .



Relatywistycznie niezmiennicza normalizacja funkcji falowej musi więc być proporcjonalna do  $E$  cząstek na jednostkę objętości (konwencja  $2E$ ):

$$\int \psi'^* \psi' dV = 2E, \quad \int \psi^* \psi dV = 1, \quad \Rightarrow \quad \psi' = \sqrt{2E} \psi$$

**Lorentzowsko niezmienniczy element macierzowy** ma więc postać:

$$M_{fi} = \langle \psi'_1 \psi'_2 \dots | \hat{H} | \dots \psi'_{n-1} \psi'_n \rangle = (2E_1 \cdot 2E_2 \cdot 2E_3 \dots 2E_n)^{1/2} T_{fi}$$

Przykład: Dla rozpadu dwuciałowego  $i \rightarrow 1 + 2$  mamy:

$$M_{fi} = \langle \psi'_1 \psi'_2 | \hat{H} | \psi'_i \rangle = (2E_i \cdot 2E_1 \cdot 2E_2)^{1/2} T_{fi}$$

$$\Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{2E_i} \int |M_{fi}|^2 \delta(E_i - E_1 - E_2) \delta^3(\vec{p}_i - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2}$$

Wyrażenie  $\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^2 2E}$  jest lorentzowsko niezmienniczą przestrzenią fazową dla każdej z cząstek w stanie końcowym.

Ponieważ całka w  $\Gamma_{fi}$  jest niezmiennicza, więc może być obliczona w dowolnym układzie odniesienia. W CMS mamy  $E_i = m_i$  oraz  $\vec{p}_i = 0$ , więc:

$$\Gamma_{fi} = \frac{1}{8\pi^2 E_i} \int |M_{fi}|^2 \delta(m_i - E_1 - E_2) \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \frac{d^3\vec{p}_1}{2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{2E_2}$$

Całkując po  $\vec{p}_2$  oraz korzystając z relacji  $d^3\vec{p}_1 = p_1^2 dp_1 d\Omega$  dostajemy ( $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1 \Rightarrow E_2^2 = m_2^2 + p_1^2$ ):

$$\begin{aligned} \Gamma_{fi} &= \frac{1}{32\pi^2 E_i} \int |M_{fi}|^2 \delta\left(m_i - \sqrt{m_1^2 + p_1^2} - \sqrt{m_2^2 + p_1^2}\right) \frac{p_1^2 dp_1 d\Omega}{E_1 E_2} \\ &= \frac{1}{32\pi^2 E_i} \int |M_{fi}|^2 g(p_1) \delta(f(p_1)) dp_1 d\Omega \end{aligned}$$

gdzie  $g(p_1) = p_1^2 / (E_1 E_2) = p_1^2 (m_1^2 + p_1^2)^{-1/2} (m_2^2 + p_1^2)^{-1/2}$

oraz  $f(p_1) = m_i - \sqrt{m_1^2 + p_1^2} - \sqrt{m_2^2 + p_1^2}$ , przy czym  $\delta(f(p_1))$  narzuca zachowanie energii, natomiast warunek  $f(p_1) = 0$  pozwala wyznaczyć pęd produktów rozpadu w CMS ( $f(p_1) = 0 \Rightarrow p_1 = p^*$ ).

# Częstość rozpadu dwuciałowego

Kolejne kroki w rachunkach:

$$\int g(p_1) \delta(f(p_1)) dp_1 = \left| \frac{df}{dp_1} \right|_{p^*}^{-1} \int g(p_1) \delta(p_1 - p^*) dp_1 = \left| \frac{df}{dp_1} \right|_{p^*}^{-1} g(p^*)$$

gdzie  $p^*$  jest rozwiązaniem równania  $f(p^*) = 0$ .

$$\frac{df}{dp_1} = -\frac{p_1}{(m_1^2 + p_1^2)^{1/2}} - \frac{p_1}{(m_2^2 + p_1^2)^{1/2}} = -\frac{p_1}{E_1} - \frac{p_1}{E_2} = -p_1 \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}$$

W rezultacie mamy:

$$\begin{aligned} \Gamma_{fi} &= \frac{1}{32\pi^2 E_i} \int |M_{fi}|^2 \left| \frac{E_1 E_2}{p_1 (E_1 + E_2)} \frac{p_1^2}{E_1 E_2} \right|_{p_1=p^*} d\Omega = \\ &= \frac{1}{32\pi^2 E_i} \int |M_{fi}|^2 \left| \frac{p_1}{E_1 + E_2} \right|_{p_1=p^*} d\Omega \end{aligned}$$

Zasada zachowania energii  $f(p_1) = 0$  daje  $E_1 + E_2 = m_i$

Ostatecznie w układzie spoczynkowym rozpadającej się cząstki (tzn. dla  $E_i = m_i$ ) otrzymujemy (słuszne dla wszystkich dwuciałowych rozpadów):

$$\frac{1}{\tau} = \Gamma = \frac{|\vec{p}^*|}{32\pi^2 m_i^2} \int |M_{fi}|^2 d\Omega$$

# Przekrój czynny na rozpraszanie

**Przekrój czynny:**  $\sigma = \frac{\text{liczba oddziaływań / jednostkę czasu / cząstkę tarczy}}{\text{strumień cząstek padających}}$

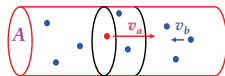
**Strumień** - liczba cząstek padających / jednostkę powierzchni / jednostkę czasu

**Różniczkowy przekrój czynny:**

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{liczba cząstek / jednostkę czasu / cząstkę tarczy / rozproszonych w } d\Omega}{\text{strumień cząstek padających}}$

P-two oddziaływania =  $\frac{n_b(v_a + v_b)A \delta t \sigma}{A} = n_b v \delta t \sigma$

Częstość oddziaływań / cząstkę typu  $a = n_b v \sigma$



Rozważmy objętość  $V$ :

całkowita częstość reakcji =  $(n_b v \sigma) \cdot (n_a V) = (n_b V) \cdot (n_a v) \cdot \sigma \equiv N_b \phi_a \sigma$

częstość = strumień  $\times$  liczba cząstek tarczy  $\times$  przekrój czynny

Rozważmy reakcję rozpraszania  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ :

częstość / objętość = (strumień 1)  $\times$  (gęstość 2)  $\times$   $\sigma = n_1(v_1 + v_2) \times n_2 \times \sigma$

Dla jednej cząstki tarczy / jednostkę objętości: częstość  $\equiv \Gamma_{fi} = (v_1 + v_2) \sigma$

$$\sigma = \frac{(2\pi)^4}{v_1 + v_2} \int |T_{fi}|^2 \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}_4}{(2\pi)^3}$$

# Lorentzowsko niezmienniczy strumień

Aby powyższy przekrój czynny był lorentzowsko niezmienniczy należy zastąpić  $T_{fi}$  przez niezmienniczy element macierzowy  $M_{fi} = (2E_1 \cdot 2E_2 \cdot 2E_3 \cdot 2E_4)^{1/2} T_{fi}$

Niezmienniczy przekrój czynny przyjmuje postać:

$$\sigma = \frac{(2\pi)^{-2}}{2E_1 2E_2 (v_1 + v_2)} \int |M_{fi}|^2 \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \frac{d^3\vec{p}_3}{2E_3} \frac{d^3\vec{p}_4}{2E_4}$$

gdzie  $F = 2E_1 2E_2 (v_1 + v_2) = \dots = 4 [(p_1^\mu p_{2\mu})^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}$ ,  
to **lorentzowsko niezmienniczy strumień**.

Ważne przypadki szczególne niezmienniczego strumienia:

Układ środka masy (CMS):

Układ spoczynkowy tarczy (LAB):

$$\begin{aligned} F &= 4E_1 E_2 (v_1 + v_2) \\ &= 4E_1 E_2 (|\vec{p}^*|/E_1 + |\vec{p}^*|/E_2) \\ &= 4|\vec{p}^*|(E_1 + E_2) \\ &= 4|\vec{p}^*|\sqrt{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 4E_1 E_2 (v_1 + v_2) \\ &= 4E_1 m_2 v_1 \\ &= 4E_1 m_2 (|\vec{p}_1|/E_1) \\ &= 4m_2 |\vec{p}_1| \end{aligned}$$