Wstęp do oddziaływań hadronów

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 5

Nierelatywistyczna mechanika kwantowa

Równanie Schrödingera (przyjmujemy $V = 0$ dla uproszczenia):

$$E = T + V = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V \quad \Rightarrow \quad \vec{p} \to -i\vec{\nabla},\ E \to i\frac{\partial}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2\psi = i\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Rozwiązanie w postaci fali płaskiej ma postać:

$$\psi = N\mathrm{e}^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)} \quad \text{gdzie} \quad -i\vec{\nabla}\psi = \vec{p}\psi \quad \text{oraz} \quad i\frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi$$

R. Schrödingera jest r. 1-go rzędu w pochodnej czasowej i 2-go w pochodnych przestrzennych - ewidentnie nie jest relatywistycznie niezmiennicze.

Wyprowadzenie równania ciągłości (zachowanie prawdopodobieństwa):

$$\psi^\star \times (\text{r. Sch.}) - \psi \times (\text{r. Sch.})^\star \;\Rightarrow\; -\tfrac{1}{2m}\left(\psi^\star\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^\star\right) = i\left(\psi^\star\tfrac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\tfrac{\partial\psi^\star}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow\; -\tfrac{1}{2m}\vec{\nabla}\left(\psi^\star\nabla\psi - \psi\nabla\psi^\star\right) = i\tfrac{\partial}{\partial t}(\psi^\star\psi)$$

Definiując gęstość oraz prąd prawdopodobieństwa jako:

$$\rho = \psi^\star\psi = |\psi|^2 \qquad \text{oraz} \qquad \vec{j} = \frac{1}{2mi}\left(\psi^\star\nabla\psi - \psi\nabla\psi^\star\right)$$

otrzymujemy równanie ciągłości: $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

Dla fali płaskiej mamy: $\rho = |N|^2$ oraz $\vec{j} = |N|^2\dfrac{\vec{p}}{m} = |N|^2\vec{v}$ (strumień).

Równanie Kleina-Gordona

Stosujemy $\vec{p} \to -i\vec{\nabla}$, $E \to i\dfrac{\partial}{\partial t}$ do relatywistycznego równania na energię:

$$E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \vec{\nabla}^2 \psi - m^2 \psi \quad \Rightarrow \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\psi = 0$$

gdzie $\partial_\mu \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\dfrac{\partial}{\partial t}, \dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z} \right) \quad \Rightarrow \quad \partial^\mu \partial_\mu \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$

Rozwiązanie w postaci fali płaskiej $\psi = N e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)}$ daje $E = \pm\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$.
Postępując analogicznie jak dla r. Sch. znajdziemy gęstość i prąd p-twa ($\psi^\star \times$ (r. KG) $- \psi \times$ (r. KG)*):

$$\psi^\star \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^\star}{\partial t^2} = \psi^\star (\nabla^2 \psi - m^2 \psi) - \psi (\nabla^2 \psi^\star - m^2 \psi^\star)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\psi^\star \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^\star}{\partial t} \right) = \vec{\nabla} \cdot (\psi^\star \nabla \psi - \psi \nabla \psi^\star)$$

Porównujac powyższe równanie z r. ciągłaści widać, że:

$$\rho = i \left(\psi^\star \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^\star}{\partial t} \right) \quad \text{oraz} \quad \vec{j} = -i(\psi^\star \nabla \psi - \psi \nabla \psi^\star)$$

Dla fali płaskiej mamy: $\rho = 2E|N|^2$ (< 0 dla $E < 0$) oraz $\vec{j} = |N|^2 \vec{p}$.

Równanie Diraca

Problemy rozwiąąań o ujemnej energii oraz ujemnej gęstości p-twa skłoniły Diraca do sformułowania relatywistycznej mechaniki kwantowej w postaci w której wszystkie gęstości p-twa są dodatnie.

Szukamy równania w którym występują tylko pochodne 1-go rzędu, w postaci:

$$\hat{H}\psi = (\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m)\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$\vec{p} = -i\vec{\nabla} \quad \Rightarrow \quad \left(-i\alpha_x\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha_y\frac{\partial}{\partial y} - i\alpha_z\frac{\partial}{\partial z} + \beta m\right)\psi = i\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

Działając powtórnie operatorami na każdą ze stron równania ("podnosząc stronami do kwadratu") mamy:

$$\left(-i\alpha_x\tfrac{\partial}{\partial x} - i\alpha_y\tfrac{\partial}{\partial y} - i\alpha_z\tfrac{\partial}{\partial z} + \beta m\right)\left(-i\alpha_x\tfrac{\partial}{\partial x} - i\alpha_y\tfrac{\partial}{\partial y} - i\alpha_z\tfrac{\partial}{\partial z} + \beta m\right)\psi = -\tfrac{\partial\psi}{\partial t^2}$$

co po rozwinięciu daje

$$\begin{aligned}
-\tfrac{\partial\psi}{\partial t^2} = & -\alpha_x^2\tfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \alpha_y^2\tfrac{\partial^\psi}{\partial y^2} - \alpha_z^2\tfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \beta^2 m^2\psi \\
& -(\alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x)\tfrac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} - (\alpha_y\alpha_z + \alpha_z\alpha_y)\tfrac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial z} - (\alpha_z\alpha_x + \alpha_x\alpha_z)\tfrac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial x} \\
& -(\alpha_x\beta + \beta\alpha_x)m\tfrac{\partial\psi}{\partial x} - (\alpha_y\beta + \beta\alpha_y)m\tfrac{\partial\psi}{\partial y} - (\alpha_z\beta + \beta\alpha_z)m\tfrac{\partial\psi}{\partial z}
\end{aligned}$$

Równanie Diraca

Aby było to poprawne sformułowanie relatywistycznej MK, cząstka swobodna musi spełniać relację $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$, czyli r. K-G. Oznacza to, że muszą być spełnione następujące warunki:

$$\begin{aligned} \alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 &= 1 \\ \alpha_j \beta + \beta \alpha_j &= 0 \\ \alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j &= 0 \quad \text{dla } j \neq k \end{aligned}$$

Aby hamiltonian $\hat{H}$ był hermitowski dla dowolnych $\vec{p}$ musi także zachodzić:

$$\alpha_j = \alpha_j^\dagger \;\text{ oraz }\; \beta = \beta^\dagger$$

Wielkości α_j i β muszą być zatem bezśladowymi macierzami hermitowskimi o parzystym wymiarze ($\geqslant 4$). Rezultaty fizyczne nie zależą od konkretnego wyboru macierzy (fizyka zawarta jest w relacjach komutacji).
Powszechnie stosuje się nastepującą konwencję:

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}$$

gdzie $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

W rezultacie funkcja falowa ma cztery składowe (tzw. spinor Diraca):

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$$

Równanie Diraca - gęstość i prąd prawdopodobieństwa

Postepujemy analogicznie jak poprzednio z r. Sch. i r. K-G
($\psi^\dagger \times$ (r. D) $- \psi \times$ (r. D)†):

$$\psi^\dagger \left(\alpha_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x} \alpha_x + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial y} \alpha_y + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial z} \alpha_z \right) \psi + \frac{\partial (\psi^\dagger \psi)}{\partial t} = 0$$

Korzystając z tożsamości: $\psi^\dagger \alpha_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x} \alpha_x \psi \equiv \frac{\partial (\psi^\dagger \alpha_x \psi)}{\partial x}$ otrzymujemy rówanie ciągłości:

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi) + \frac{\partial (\psi^\dagger \psi)}{\partial t} = 0$$

Gęstość p-twa i prąd mają więc postać:

$$\rho = \psi^\dagger \psi \qquad \text{oraz} \qquad \vec{j} = \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi$$

Rozwiązania r. Diraca dają zawsze nieujemną gęstość p-twa:

$$\psi^\dagger \psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 > 0$$

Można pokazać, że spinory Diraca reprezentują cząstki o spinie połówkowym o wewnętrznym momencie magnetycznym danym przez:

$$\vec{\mu} = \frac{q}{m} \vec{S}$$

gdzie $\vec{S}$ jest spinem cząstki, q jej ładunkiem, a m masą.

Macierze γ Diraca

Mnożąc r. Diraca od lewej strony przez β oraz wprowadzając oznacznia:

$$\gamma^0 \equiv \beta, \quad \gamma^1 \equiv \beta\alpha_x, \quad \gamma^2 \equiv \beta\alpha_y, \quad \gamma^3 \equiv \beta\alpha_z$$

można je zapisać w postaci: $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0$

Uwaga 1: Macierze γ^μ nie tworzą czterowektora (są to stałe macierze, które są niezmiennicze przy TL).

Uwaga 2: Można pokazać, że r. Diraca jest niezmiennicze względem TL.

Z własności macierzy α i β wynika, np. że:

$$(\gamma^0)^2 = \beta^2 = 1 \qquad \text{oraz} \qquad (\gamma^1)^2 = \beta\alpha_x\beta\alpha_x = -\alpha_x\beta\beta\alpha_x = -\alpha_x^2 = -1$$

Podobnie można pokazać, że

$$(\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1, \qquad \gamma^0\gamma^j + \gamma^j\gamma^0 = 0, \qquad \gamma^j\gamma^k + \gamma^k\gamma^j = 0 \;\; (j \neq k)$$

Podsumowując mamy: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$

Macierz γ^0 jest hermitowska, macierze γ^j, $1 = 1, 2, 3$ są antyhermitowskie:

$$\gamma^{0\,\dagger} = \gamma^0, \;\; \gamma^{1\,\dagger} = -\gamma^1, \;\; \gamma^{2\,\dagger} = -\gamma^2, \;\; \gamma^{3\,\dagger} = -\gamma^3$$

np. $\gamma^{1\,\dagger} = (\beta\alpha_x)^\dagger = \alpha_x^\dagger\beta^\dagger = \alpha_x\beta = -\beta\alpha_x = -\gamma^1$

Reprezentacja Pauliego-Diraca, spinory dołaczone

W reprezentacji Pauliego-Diraca macierze γ mają postać:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

czyli:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wyrażając ρ oraz $\vec{j}$ za pomocą macierzy γ definiujemy czterowektor prądu:

$$j^\mu = (\rho, \vec{j}) = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

gdzie $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ jest tzw. spinorem dołączonym:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_1^\star, \psi_2^\star, \psi_3^\star, \psi_4^\star) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\psi_1^\star, \psi_2^\star, -\psi_3^\star, -\psi_4^\star)$$

Korzystając z czterowektora prądu równanie ciągłości można zapisać w postaci:

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

Rozwiązanie dla cząstki spoczywającej

Szukamy rozwiązań r. Diraca dla cząstki swobodnej w postaci:

$$\psi = u(E, \vec{p}) \mathrm{e}^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)}$$

gdzie $u(E, \vec{p})$ jest stałym spinorem.

Ponieważ $\partial_0 \psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} = -iE\psi, \quad \partial_1 \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = ip_x \psi, \ldots$ (zależność od $(t, \vec{r})$ tylko w eksponencie) więc r. Diraca można zapisać w postaci "pędowej":

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad (\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0$$

Dla cząstki spoczywającej $\vec{p} = 0$ mamy:

$$\psi = u(E, 0)\mathrm{e}^{-iEt} \quad \Rightarrow \quad E\gamma^0 u - mu = 0 \quad \Rightarrow \quad E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix}$$

Równanie to ma cztery ortogonalne rozwiązania:

$$u_1(E, 0) = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_2(E, 0) = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_3(E, 0) = N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_4(E, 0) = N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

z których u_1 i u_2 odpowiada $E = m$, natomiast u_3 i u_4 odpowiada $E = -m$.

Uwzględniając zależność od czasu mamy:

$$\psi_1 = u_1 \mathrm{e}^{-imt}, \quad \psi_1 = u_2 \mathrm{e}^{-imt}, \quad \psi_3 = u_3 \mathrm{e}^{+imt}, \quad \psi_4 = u_4 \mathrm{e}^{+imt}$$

opisujące dwa stany spinowe o $E > 0$ i dwa stany spinowe o energii $E < 0$.

Równanie Diraca: rozwiązanie w postaci fali płaskiej

Szukamy ogólnego rozwiązania w postaci fali płaskiej $\psi = u(E,\vec{p})\mathrm{e}^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$

$$\gamma^\mu p_\mu - m = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} E - \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{p} - m \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E-m)I & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -(E+m)I \end{pmatrix}$$

Równanie Diraca przyjmuje postać układu równań ($u = (u_A, u_B)^T$):

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} (E-m)I & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -(E+m)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\, u_B = (E-m)\, u_A \\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\, u_A = (E+m)\, u_B \end{cases}$$

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} p_x + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} p_y + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} p_z = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}$$

W rezultacie otrzymujemy

$$u_B = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} u_A = \frac{1}{E+m} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} u_A$$

$$u_A = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E-m} u_B = \frac{1}{E-m} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} u_B$$

Równanie Diraca: rozwiązanie w postaci fali płaskiej

Wybierając w pierwszym z równań $u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lub $u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz w drugim $u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lub $u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ otrzymujemy cztery rozwiązania w postaci:

$$\psi_i = u_i(E, \vec{p})\mathrm{e}^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)}$$

$$u_1 = N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix}, \quad u_2 = N_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}, \quad u_3 = N_3 \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = N_4 \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Uwaga: To są cztery niezależne równania tylko wtedy gdy w dwóch z nich $E < 0$.

Porównując powyższe rozwiązania z rozwiązaniami dla cząstki spoczywającej widać, że rozwiązania u_1 i u_2 odpowiadają $E > 0$, natomiast rozwiązania u_3 i u_4 - $E < 0$.

W r. Diraca wszystkim rozwiązaniom odpowiadają dodatnie gęstości p-twa.

Interpretacja Diraca: próżnia z obsadzonymi wszystkimi stanami o $E < 0$, zasada wykluczania Pauliego odpowiedzialna za nie przechodzenie elektronów o dodatnich energiach do stanów o ujemnej energii.

Wyjaśnienie kreacji par i anihilacji elektron-pozyton - dziura w stanie o ujemnej energii odpowiada antycząstce o dodatniej energii.

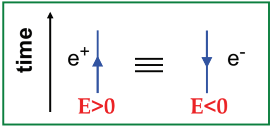
Odkrycie pozytonu: C.D. Anderson, Phys. Rev. 43 (1933) 491.

Interpretacja Feynmana - Stückelberga

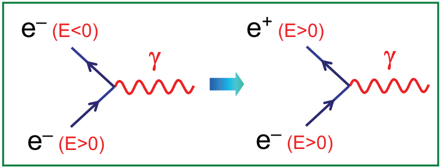
Problem z bozonami (nie działa zasada Pauliego) w interpretacji Diraca.

Iterpretacja Feynmana - Stückelberga:

Rozwiązania r. D. o ujemnej energii odpowiadają czastkom o ujemnej energii poruszającym sie wstecz w czasie lub antycząstkom o dodatniej energii poruszającym się w przód w czasie.



$e^{-i(-E)(-t)} \longrightarrow e^{-iEt}$



Spinory antycząstek:

Przedefiniowujemy stany o ujemnej energii tak aby $E = +|\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}|$.

❶ definiujemy funkcję falową antycząstki zmieniając znak E oraz $\vec{p}$:

$$
\begin{aligned}
v_1(E,\vec{p})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} &= u_4(-E,-\vec{p})e^{i[-\vec{p}\cdot\vec{r}-(-E)t]} \\
v_2(E,\vec{p})e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} &= u_3(-E,-\vec{p})e^{i[-\vec{p}\cdot\vec{r}-(-E)t]}
\end{aligned}
$$

gdzie $E = +|\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}|$.

Spinory antycząstek

❷ Znajdujemy rozwiązania r. Diraca o ujemnej energii w postaci fali płaskiej:

$$\psi = v(E, \vec{p})\mathrm{e}^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} \quad \text{gdzie} \quad E = |\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}|$$

Uwaga: Chociaż $E > 0$ to są to jednak rozwiązania o ujemnej energii w sensie:

$$\hat{H}\psi = i\frac{\partial}{\partial t}\psi = -E\psi$$

Rozwiązujemy równanie Diraca $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$:

$$\Rightarrow \quad (-\gamma^0 E + \gamma^1 p_x + \gamma^2 p_y + \gamma^3 p_z - m)v = 0 \quad \Rightarrow \quad (\gamma^\mu p_\mu + m)v = 0$$

Postępując analogicznie jak poprzednio otrzymujemy:

$$\begin{cases} (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})v_A = (E-m)v_B \\ (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})v_B = (E+m)v_A \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v_1 = N_1' \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = N_2' \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Spinory cząstek i antycząstek - podsumowanie

- cztery rozwiązania w postaci: $\psi_i = u_i(E, \vec{p})\mathrm{e}^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$:

$$u_1 = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix}, \quad u_2 = N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}, \quad u_3 = N\begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = N\begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- cztery rozwiązania w postaci: $\psi_i = v_i(E, \vec{p})\mathrm{e}^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$:

$$v_1 = N\begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = N\begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E-m} \end{pmatrix}, v_4 = N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \end{pmatrix},$$

Rozwiązania u_1, u_2 oraz v_1, v_2 odpowiadają energii $E = +|\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}|$

Rozwiązania u_3, u_4 oraz v_3, v_4 odpowiadają energii $E = -|\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}|$

Ponieważ spinor ma cztery komponenty, więc tylko cztery spinory mogą być liniowo niezależne.

Wybieramy spinory będące rozwiązaniami o $E > 0$, czyli $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$.

Normalizacja funkcji falowej

Chcemy znormalizować funkcję falową do $2E$ cząstek na jednostkę objętości.

Gęstość prawdopodobieństwa dana jest przez:

$$\psi = u_1 \mathrm{e}^{+i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} \quad \Rightarrow \quad \rho = \psi^\dagger \psi = u_1^\dagger u_1$$

Korzystając z jawnej postaci u_1 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} u_1^\dagger u_1 &= |N|^2 \left(1 + \frac{p_z^2}{(E+m)^2} + \frac{p_x^2 + p_y^2}{(E+m)^2} \right) = |N|^2 \left(\frac{(E+m)^2 + |\vec{p}|^2}{(E+m)^2} \right) \\ &= |N|^2 \left(\frac{(E+m)^2 + E^2 - m^2}{(E+m)^2} \right) = |N|^2 \frac{2E}{E+m} \end{aligned}$$

A więc $N = \sqrt{E+m}$

Tą samą wartość N otrzymujemy dla u_1, u_2, v_1, v_2.

Operatory kwantowomechaniczne dające fizyczne wartości energii i pędu dla antycząstek:

$$\hat{H}^{(v)} = -i\partial/\partial t, \qquad \hat{p}^{(v)} = i\vec{\nabla}$$

Operator fizycznego spinu antycząstki:

$$(E, \vec{p}) \to (-E, -\vec{p}) : \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \to -\vec{L} \quad \Rightarrow \quad [H, \vec{L} + \vec{S}] = 0 \ \Rightarrow \ \hat{S}^{(v)} = -\hat{S}$$

Rozwiązania równania Diraca - podsumowanie

- Znormalizowane rozwiązania r. Diraca dla cząstki:

$$\psi = u(E,\vec{p})\mathrm{e}^{+i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} \qquad \text{spełnia} \qquad (\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0$$

gdzie

$$u_1 = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \qquad u_2 = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}$$

- Znormalizowane rozwiązania dla antycząstki w funkcji fizycznych wartości energii i pędów:

$$\psi = v(E,\vec{p})\mathrm{e}^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} \qquad \text{spełnia} \qquad (\gamma^\mu p_\mu + m)v = 0$$

gdzie

$$v_1 = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

W obu przypadkach (dla cząstek i antycząstek) mamy: $E = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$

Sprzężenie ładunkowe

Sprzężenie ładunkowe to dyskretna transformacja symetrii zmieniająca cząstkę na antycząstkę.

Ruch cząstki w polu elektromagnetycznym $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ otrzymuje się stosując tzw. minimalne podstawienie

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{p} \to \vec{p} - e\vec{A}, & \hat{\vec{p}} = -i\vec{\nabla} \\ E \to E - e\phi, & \hat{E} = i\frac{\partial}{\partial t} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \partial_\mu \to \partial_\mu + ieA_\mu$$

Wówczas równanie Diraca przyjmuje postać:

$$\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi + im\psi = 0$$

Sprzęgając w sposób zespolony i mnożąc od lewej przez $(-i\gamma^2)$ otrzymujemy:

$$-i\gamma^2\gamma^{\mu\star}(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi^\star - m\gamma^2\psi = 0$$

Ponieważ $\gamma^{0\star} = \gamma^0$, $\gamma^{1\star} = \gamma^1$, $\gamma^{2\star} = -\gamma^2$, $\gamma^{3\star} = \gamma^3$ oraz $\gamma^2\gamma^{\mu\star} = -\gamma^\mu\gamma^2$
więc otrzymujemy: $\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)i\gamma^2\psi^\star + imi\gamma^2\psi^\star = 0$
Definiujemy operator sprzężenia ładunkowego i otrzymujemy:

$$\psi' = \hat{C}\psi \equiv i\gamma^2\psi^\star \quad \Rightarrow \quad \gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi' + im\psi' = 0$$

Porównując z oryginalnym równaniem $\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi + im\psi = 0$ widać, że spinor ψ' opisuje antycząstkę (ta sama masa i przeciwny ładunek).

Sprzężenie ładunkowe

Rozważmy działanie operatora $\hat{C}$ na funkcje falową cząstki swobodnej:

$$\psi = u_1 \mathrm{e}^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} \quad \Rightarrow \quad \psi' = \hat{C}\psi = i\gamma^2\psi^\star = i\gamma^2 u_1^\star \mathrm{e}^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$$

$$i\gamma^2 u_1^\star = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix}^\star = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1$$

A więc mamy:

$$\psi = u_1 \mathrm{e}^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} \xrightarrow{\hat{C}} \psi' = v_1 \mathrm{e}^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$$

$$\psi = u_2 \mathrm{e}^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)} \xrightarrow{\hat{C}} \psi' = v_2 \mathrm{e}^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$$

Działając operatorem sprzężenia ładunkowego na spinory cząstki u_1 i u_2 otrzymujemy spinory antycząstki v_1 i v_2.