

# Wstęp do oddziaływań hadronów

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej  
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 6

# Stany spinowe

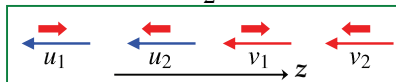
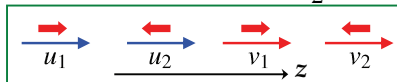
W ogólności spinory  $u_1, u_2, v_1$  i  $v_2$  nie są stanami własnymi operatora spinu  $\hat{S}_z$ :

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2}\Sigma_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Stanami własnymi operatora  $\hat{S}_z$  są jedynie spinory cząstek spoczywających lub poruszających się w kierunku osi  $z$ , tzn.  $p_z = \pm|\vec{p}|$ :

$$u_1 = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\pm|\vec{p}|}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\mp|\vec{p}|}{E+m} \end{pmatrix}, \quad v_1 = N \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mp|\vec{p}|}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = N \begin{pmatrix} \frac{\pm|\vec{p}|}{E+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_z u_1 &= +\frac{1}{2}u_1 & \hat{S}_z^{(v)} v_1 &\equiv -\hat{S}_z v_1 = +\frac{1}{2}v_1 \\ \hat{S}_z u_2 &= -\frac{1}{2}u_2 & \hat{S}_z^{(v)} v_2 &\equiv -\hat{S}_z v_2 = -\frac{1}{2}v_2 \end{aligned}$$



A więc spinory  $u_1, u_2, v_1$  i  $v_2$  są stanami własnymi  $\hat{S}_z$  tylko dla  $p_z = \pm|\vec{p}|$ .

Do oznaczania stanów chcemy wykorzystywać tzw. dobre liczby kwantowe, tzn. takie które komutują z hamiltonianem.

Jednak  $[\hat{H}, \hat{S}_z] \neq 0$  ... ale ...  $[\hat{H}, \hat{S} \cdot \hat{p}] = 0$

**Helicity** nazywamy składową spinu cząstki wzdłuż kierunku jej ruchu:

$$h \equiv \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \Rightarrow \hat{h} = \frac{\hat{\Sigma} \cdot \hat{p}}{2|\vec{p}|} = \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} \sigma \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \sigma \cdot \vec{p} \end{pmatrix}$$



W wyniku pomiaru składowej spinu cząstki o spinie połówkowym wzdłuż dowolnej osi otrzymujemy dwie wartości  $\pm 1/2$ . Oznacza to, że wartościami własnymi operatora helicity dla cząstki o spinie połówkowym jest  $\pm 1/2$ :



Szukamy rozwiązań r. Diraca, które są jednocześnie stanami własnymi operatora helicity:  $\frac{1}{2p} \left( \hat{\Sigma} \cdot \hat{p} \right) u_{\uparrow} = +\frac{1}{2} u_{\uparrow}$        $\frac{1}{2p} \left( \hat{\Sigma} \cdot \hat{p} \right) u_{\downarrow} = -\frac{1}{2} u_{\downarrow}$

gdzie  $u_{\uparrow}$  oraz  $u_{\downarrow}$  są **prawo** i **lewo skrętnymi** stanami helicity, a  $\hat{p}$  jest operatorem pędu cząstki.

# Stany własne operatora helicity

Równanie własne ma postać:

$$\frac{1}{2p} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

Dla cząstki poruszającej się w kierunku  $(\theta, \phi)$  mamy:

$$\vec{p} = (p \sin \theta \cos \theta, p \sin \theta \sin \phi, p \cos \theta)$$

$$\frac{1}{2p} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Zapisując  $u_A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  lub  $u_B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

A więc dla obu komponent  $u_A$  i  $u_B$  mamy:

$$\frac{b}{a} = \frac{2\lambda - \cos \theta}{\sin \theta} e^{i\phi}$$

# Stany własne operatora helicity

Dla prawoskrętnych stanów helicity mamy:

$$\frac{b}{a} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} e^{i\phi} = e^{i\phi} \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}$$

$$u_{A\uparrow} \propto u_{B\uparrow} \propto \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \Rightarrow u_{\uparrow} = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_1 \cos(\theta/2) \\ \kappa_1 e^{i\phi} \sin(\theta/2) \\ \kappa_2 \cos(\theta/2) \\ \kappa_2 e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

Z r. Diraca możemy także znaleźć względną normalizację stanów  $u_A$  i  $u_B$ :

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_A = (E + m)u_B \Rightarrow u_B = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m}u_A = \frac{|\vec{p}|}{E + m}u_A$$

A więc

$$u_{\uparrow} = N \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos(\theta/2) \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

Podobnie można znaleźć stany cząstek o ujemnej skrętności oraz stany helicity dla antycząstek ( $\hat{S}^{(v)} = -\hat{S}$ ,  $\hat{h} = -(\vec{\Sigma} \cdot \hat{p})/2|\vec{p}| \Rightarrow \hat{h}v_{\uparrow} = -v_{\uparrow}$ ).

# Stany własne operatora helicy - podsumowanie

**Cząstki:**

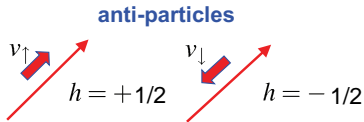
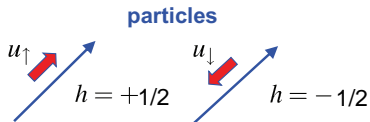
$$u_{\uparrow} = N \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos(\theta/2) \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$u_{\downarrow} = N \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos(\theta/2) \\ -\frac{|\vec{p}|}{E+m} e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

**Antycząstki:**

$$v_{\uparrow} = N \begin{pmatrix} \frac{|\vec{p}|}{E+m} \sin(\theta/2) \\ -\frac{|\vec{p}|}{E+m} e^{i\phi} \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) \\ e^{i\phi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$v_{\downarrow} = N \begin{pmatrix} \frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos(\theta/2) \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} e^{i\phi} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$



Dla wszystkich stanów  $N = \sqrt{E + m}$

# Parzystość wewnętrzna cząstek Diraca

Operacja parzystości zdefiniowana jest jako odbicie współrzędnych przestrzennych względem początku układu:

$$x' \equiv -x, \quad y' \equiv -y, \quad z' \equiv -z, \quad t' \equiv t$$

Rozważmy spinor Diraca  $\psi(x, y, z, t)$  spełniający równanie Diraca:

$$i\gamma^1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\gamma^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} - m\psi = -i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Rozważmy operator  $\hat{P} \equiv \gamma^0$ :  $\psi'(x', y', z', t') = \hat{P}\psi(x, y, z, t) = \gamma^0\psi(x, y, z, t)$

Ponieważ  $(\gamma^0)^2 = 1$  więc  $\psi(x, y, z, t) = \gamma^0\psi'(x', y', z', t')$  oraz:

$$\begin{aligned} i\gamma^1\gamma^0 \frac{\partial \psi'}{\partial x} + i\gamma^2\gamma^0 \frac{\partial \psi'}{\partial y} + i\gamma^3\gamma^0 \frac{\partial \psi'}{\partial z} - m\gamma^0\psi' &= -i\gamma^0\gamma^0 \frac{\partial \psi'}{\partial t} \\ -i\gamma^1\gamma^0 \frac{\partial \psi'}{\partial x'} - i\gamma^2\gamma^0 \frac{\partial \psi'}{\partial y'} - i\gamma^3\gamma^0 \frac{\partial \psi'}{\partial z'} - m\gamma^0\psi' &= -i\gamma^0\gamma^0 \frac{\partial \psi'}{\partial t'} \end{aligned}$$

Korzystając z faktu, że  $\gamma^0$  antykomutuje z  $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$  oraz mnożąc obustronnie przez  $\gamma^0$  otrzymujemy r. Diraca w nowych współrzędnych:

$$i\gamma^1 \frac{\partial \psi'}{\partial x'} + i\gamma^2 \frac{\partial \psi'}{\partial y'} + i\gamma^3 \frac{\partial \psi'}{\partial z'} - m\psi' = -i\gamma^0 \frac{\partial \psi'}{\partial t'}$$

# Parzystość wewnętrzna

A więc r. Diraca nie zmienia postaci przy transformacji parzystości pod warunkiem, że spinory Diraca transformują się jak:

$$\psi \rightarrow \hat{P}\psi = \pm\gamma^0\psi$$

Rozwiązania r. Diraca dla cząstki / antycząstki w spoczynku mają postać:

$$\psi = u_1 e^{-imt}, \quad \psi = u_2 e^{-imt}, \quad \psi = v_1 e^{+imt}, \quad \psi = v_2 e^{+imt}$$

gdzie

$$u_1 = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}u_1 = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm u_1, \dots, \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \hat{P}u_1 = \pm u_1 & \hat{P}v_1 = \mp v_1 \\ \hat{P}u_2 = \pm u_2 & \hat{P}v_2 = \mp v_2 \end{array}$$

A więc antycząstka w spoczynku ma przeciwną parzystość wewnętrzną do cząstki w spoczynku.

Konwencja: cząstki mają dodatnią parzystość wewnętrzną ( $\hat{P} = +\gamma^0$ ).



# Podsumowanie równania Diraca

Sformułowanie relatywistycznej mechaniki kwantowej za pomocą liniowego r. Diraca

$$\hat{H}\psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

pozwala na opis cząstek o spinie połówkowym.

R. Diraca można zapisać w postaci

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

Wprowadzamy czterowektor prądu i spinor dołączony:

$$j^\mu = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

R. Diraca wymaga istnienia dwóch rozwiązań o dodatniej energii i dwóch o ujemnej.

Interpretacja Feynmana-Stückelberga: cząstki o ujemnej energii poruszające się wstecz w czasie odpowiadają fizycznym cząstkom o dodatniej energii poruszającym się do przodu w czasie.

Operatory sprzężenia ładunkowego i parzystości:

$$\psi \rightarrow \hat{C}\psi = i\gamma^2\psi^\dagger \quad \psi \rightarrow \hat{P}\psi = \gamma^0\psi$$

Rozważmy oddziaływanie elektromagnetyczne między elektronem i leptonem tau zachodzące poprzez wymianę fotonu. Musimy uwzględnić spin elektronu i tau oraz spin (polaryzację) wirtualnego fotonu.

R. Diraca dla cząstek oddziałujących elektromagnetycznie przyjmuje postać:

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi + iq\gamma^\mu A_\mu \psi + im\psi = 0$$

Mnożąc od lewej przez  $i\gamma^0$  otrzymujemy ( $A_\mu = (\phi, -\vec{A})$  oraz  $\partial_\mu = (\partial_0, +\vec{\nabla})$ ):

$$i\gamma^0 \gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi = (\gamma^0 m - i\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla})\psi + q\gamma^0 \gamma^\mu A_\mu \psi$$

Energia potencjalna naładowanej cząstki o spinie połówkowym w polu elektromagnetycznym dana jest więc przez:

$$\hat{V}_D = q\gamma^0 \gamma^\mu A_\mu$$

W przypadku oddziaływania cząstek bezspinowych element macierzowy ma postać:

$$M = \langle \psi_c | V | \psi_a \rangle \frac{1}{q^2 - m_x^2} \langle \psi_d | V | \psi_b \rangle$$

$\mathcal{G}_a$                        $\mathcal{G}_b$

Element macierzowy rozpraszania elektron-tau ma postać:

$$M = [u_e^\dagger(p_3)q_e\gamma^0\gamma^\mu u_e(p_1)] \sum_\lambda \frac{\varepsilon_\mu^{(\lambda)}\varepsilon_\nu^{(\lambda)*}}{q^2} [u_\tau^\dagger(p_4)q_\tau\gamma^0\gamma^\nu u_\tau(p_2)]$$

Uwzględnienie wszystkich polaryzacji wirtualnego fotonu daje

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu^{(\lambda)}\varepsilon_\nu^{(\lambda)*} = -g_{\mu\nu}$$

Korzystając z definicji spinora dołączonego  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$  otrzymujemy:

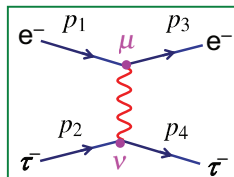
$$M = [\bar{u}_e(p_3)q_e\gamma^\mu u_e(p_1)] \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} [\bar{u}_\tau(p_4)q_\tau\gamma^\nu u_\tau(p_2)]$$

Definiując L. niezmiennicze prądy:

$$j_e^\mu = \bar{u}_e(p_3)q_e\gamma^\mu u_e(p_1), \quad j_\tau^\nu = \bar{u}_\tau(p_4)q_\tau\gamma^\nu u_\tau(p_2)$$

widać, że element macierzowy jest też niezmienniczy:

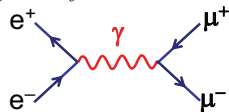
$$M = -q_e q_\tau \frac{j_e \cdot j_\tau}{q^2}$$



# Reguły Feynmana w QED

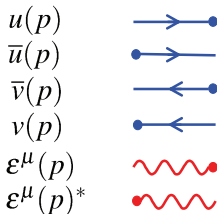
Element macierzowy ( $-iM$ ) jeśli iloczynem następujących czynników:

- ▶ propagator dla każdej linii wewnętrznej,
- ▶ spinor Diraca dla każdej linii zewnętrznej,
- ▶ czynnik wierzchołka dla każdego wierzchołka.



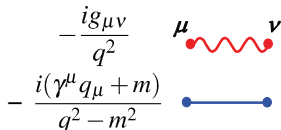
## Linie zewnętrzne:

- spin 1/2:
  - cząstka wchodząca
  - cząstka wychodząca
  - antycząstka wchodząca
  - antycząstka wychodząca
- spin 1:
  - foton wchodzący
  - foton wychodzący



## Linie wewnętrzne (propagatory):

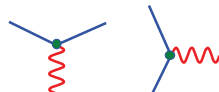
- spin 1: foton
- spin 1/2: fermion



## Czynnik wierzchołka (ładunek $-|e|$ ):

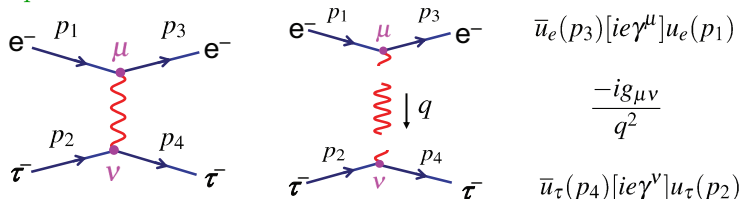
- spin 1/2: fermion

$$-ie\gamma^\mu$$



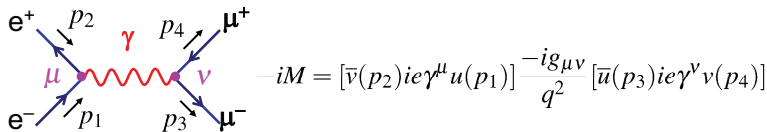
# Reguły Feynmana w QED - przykłady

► Rozpraszanie  $e^- \tau^- \rightarrow e^- \tau^-$ :



$$-iM = [\bar{u}_e(p_3)ie\gamma^\mu u_e(p_1)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} [\bar{u}_\tau(p_4)ie\gamma^\nu u_\tau(p_2)]$$

► Anihilacja  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ :



$$-iM = [\bar{v}(p_2)ie\gamma^\mu u(p_1)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} [\bar{u}(p_3)ie\gamma^\nu v(p_4)]$$

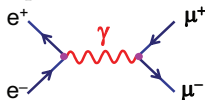
Uwagi:

- w każdym wierzchołku najpierw piszemy spinor dołączony,
- każdy wierzchołek ma inny index,
- $g_{\mu\nu}$  łączy indeksy obu wierzchołków.

# Obliczanie przekrojów czynnych w QED

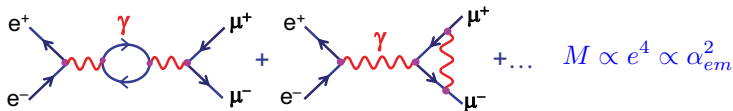
1 Narysować wszystkie możliwe diagramy Feynmana dla danego procesu.

Np. dla procesu  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  istnieje jeden diagram **najniższego rzędu (LO)**:



$$M \propto e^2 \propto \alpha_{em}$$

oraz wiele diagramów **drugiego rzędu (NLO)** i wyższych rzędów:



2 Dla każdego diagramu obliczyć element macierzowy stosując reguły Feynmana.

3 Dodać elementy macierzowe i podnieść moduł do kwadratu:

$$|M_{fi}|^2 = (M_1 + M_2 + M_3 + \dots)(M_1^* + M_2^* + M_3^* + \dots)$$

4 Obliczyć częstość rozpadu / przekrój czynny stosując znane formuły, np.:

$$\Gamma = \frac{p^*}{32\pi^2 m_a^2} \int |M_{fi}|^2 d\Omega, \quad \frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_f^*|}{|\vec{p}_i^*|} |M_{fi}|^2, \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} |M_{fi}|^2$$

# Anihilacja elektron - pozyton

Rozważamy proces  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  w CMS:

$$p_1 = (E, 0, 0, p) \quad p_2 = (E, 0, 0, -p)$$

$$p_3 = (E, \vec{p}_f) \quad p_4 = (E, -\vec{p}_f)$$

W najniższym rzędzie (LO) mamy:

$$-iM = [\bar{v}(p_2)ie\gamma^\mu u(p_1)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} [\bar{u}(p_3)ie\gamma^\nu v(p_4)]$$

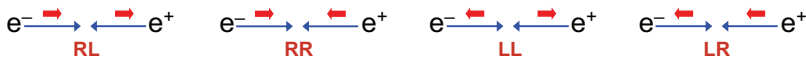
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} |M_{fi}|^2, \quad s = (p_1 + p_2)^2 = 4E^2 = q^2$$

Korzystając z definicji czterowektora prądu  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  element macierzowy można zapisać w postaci jawnie niezmienniczej:

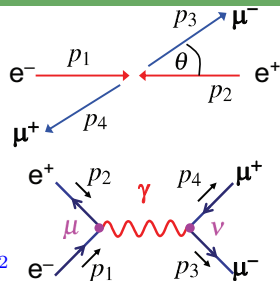
$$M = -\frac{e^2}{s} g_{\mu\nu} [\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_3)\gamma^\nu v(p_4)] = -\frac{e^2}{s} g_{\mu\nu} (j_e)^\mu (j_\mu)^\nu = -\frac{e^2}{s} j_e \cdot j_\mu$$

Jeśli elektrony i pozytony nie są spolaryzowane, to mamy równe liczby ujemnych i dodatnich stanów helicyty.

W stanie początkowym możliwe są cztery kombinacje spinów:



Podobnie w stanie końcowym mamy cztery możliwe kombinacje helicyty.



# Spin w anihilacji $e^+e^-$

Daje to w sumie 16 możliwych kombinacji, np.  $RL \rightarrow RR, RL \rightarrow RL, \dots$

W rezultacie element macierzowy należy wysumować po wszystkich 16 możliwych stanach helicity oraz usrednić po stanach początkowych:

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{1}{4} \sum |M_i|^2 = \frac{1}{4} (|M_{LL \rightarrow LL}|^2 + |M_{LL \rightarrow LR}|^2 + \dots)$$

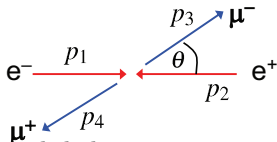
Uwaga: W granicy  $E \gg m_\mu$  tylko cztery kombinacje stanów helicity dają niezerowe elementy macierzowe.

W układzie CMS w granicy  $E \gg m$  mamy:

$$p_1 = (E, 0, 0, E), \quad p_2 = (E, 0, 0, -E)$$

$$p_3 = (E, E \sin \theta, 0, E \cos \theta)$$

$$p_4 = (E, -E \sin \theta, 0, -E \cos \theta)$$



Spinory cząstek/antycząstek o lewo i prawoskrętnych stanach helicity:

$$u_\uparrow = N \begin{pmatrix} c \\ e^{i\phi} s \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} c \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} e^{i\phi} s \end{pmatrix}, u_\downarrow = N \begin{pmatrix} -s \\ e^{i\phi} c \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} s \\ -\frac{|\vec{p}|}{E+m} e^{i\phi} c \end{pmatrix}, v_\uparrow = N \begin{pmatrix} -\frac{|\vec{p}|}{E+m} s \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} e^{i\phi} c \\ -s \\ e^{i\phi} c \end{pmatrix}, v_\downarrow = N \begin{pmatrix} \frac{|\vec{p}|}{E+m} c \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} e^{i\phi} s \\ c \\ e^{i\phi} s \end{pmatrix}$$

gdzie  $s = \sin(\theta/2)$ ,  $c = \cos(\theta/2)$ ,  $N = \sqrt{E+m}$



# Spin w anihilacji $e^+e^-$

W granicy  $E \gg m$  mamy:

$$u_{\uparrow} = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ se^{i\phi} \\ c \\ se^{i\phi} \end{pmatrix} \quad u_{\downarrow} = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ ce^{i\phi} \\ s \\ -ce^{i\phi} \end{pmatrix} \quad v_{\uparrow} = \sqrt{E} \begin{pmatrix} s \\ -ce^{i\phi} \\ -s \\ ce^{i\phi} \end{pmatrix} \quad v_{\downarrow} = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ se^{i\phi} \\ c \\ se^{i\phi} \end{pmatrix}$$

W stanie początkowym elektron ( $\theta = 0$ ) oraz pozyton ( $\theta = \pi$ ) mogą być lewo lub prawoskrętne:

$$u_{\uparrow}(p_1) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_{\downarrow}(p_1) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_{\uparrow}(p_2) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_{\downarrow}(p_2) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

W stanie końcowym (wybierając  $\phi = 0$  dla  $\mu^-$  oraz  $\phi = \pi$  dla  $\mu^+$ ) mamy:

$$u_{\uparrow}(p_3) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ s \\ c \\ s \end{pmatrix} \quad u_{\downarrow}(p_3) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} -s \\ c \\ s \\ -c \end{pmatrix} \quad v_{\uparrow}(p_4) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{pmatrix} \quad v_{\downarrow}(p_4) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} s \\ -c \\ s \\ -c \end{pmatrix}$$

