

Wstęp do oddziaływań hadronów

Mariusz Przybycień

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza

Wykład 9

Rozpraszanie elastyczne elektron-proton przy dużym q^2

► Formuła Rosenbluth'a przyjmuje przy dużym q^2 postać:

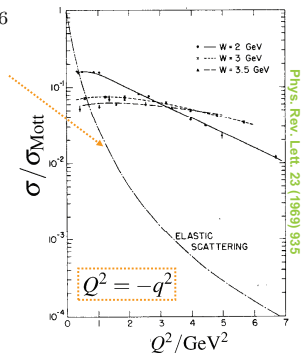
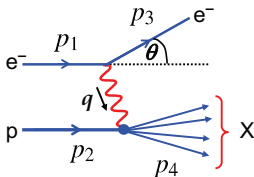
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{elastic}} = \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4 \theta/2} \frac{E_3}{E_1} \left(\frac{q^2}{2M^2} G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad \tau = -\frac{q^2}{4M^2} \gg 1$$

Parametryzacja magnetycznego czynnika struktury z rozpraszania elastycznego:

$$G_M(q^2) \approx \frac{1}{(1 + q^2/0.71 \text{ GeV}^2)^2} \Rightarrow G_M(q^2) \propto q^{-4} \text{ dla dużych } q^2$$

Elastyczny przekrój czynny maleje jak $(d\sigma/d\Omega)_{\text{el}} \propto q^{-6}$

Ze względu na skończone rozmiary protonu, p-two rozpraszania elastycznego przy dużym q^2 jest małe i dominuje rozpraszanie nieelastyczne, w którym proton zostaje rozbit.



Kinematyka rozpraszania nieelastycznego

- ▶ W rozpraszaniu nieelastycznym masa stanu końcowego:

$$M_X^2 = p_4^2 = E_4^2 - |\vec{p}_4|^2 > M^2$$

- ▶ Definiujemy zmienne kinematyczne x, y, ν, Q^2 :

- x Bjorkena: $x \equiv \frac{Q^2}{2p_2 \cdot q}$ gdzie $Q^2 \equiv -q^2 > 0$

$$M_X^2 = p_4^2 = (q + p_2)^2 = -Q^2 + 2p_2 \cdot q + M^2$$

$$\Rightarrow Q^2 = 2p_2 \cdot q + M^2 - M_X^2 \Rightarrow Q^2 \leq 2p_2 \cdot q$$

Rozpraszanie nieelastyczne: $0 < x < 1$; rozpraszanie elastyczne: $x = 1$

- $y \equiv \frac{p_2 \cdot q}{p_2 \cdot p_1}$

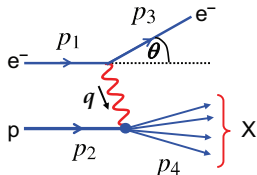
W LAB: $p_1 = (E_1, 0, 0, E_1)$, $p_2 = (M, 0, 0, 0)$, $q = (E_1 - E_3, \vec{p}_1 - \vec{p}_3)$

$$y = \frac{M(E_1 - E_3)}{ME_1} = 1 - \frac{E_3}{E_1} \Rightarrow 0 < y < 1$$

W CMS (zaniedbując masy elektronu i protonu):

$$p_1 = (E, 0, 0, E), \quad p_2 = (E, 0, 0, -E), \quad p_3 = (E, E \sin \theta^*, 0, E \cos \theta^*)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta^*)$$



- $\nu \equiv \frac{p_2 \cdot q}{M}$

W LAB: $p_1 = (E_1, 0, 0, E_1)$, $p_2 = (M, 0, 0, 0)$, $q = (E_1 - E_3, \vec{p}_1 - \vec{p}_3)$

$\nu = E_1 - E_3$ - strata energii cząstki padającej

- ▶ Zmienne kinematyczne można wyrazić za pomocą kwadratu energii w CMS:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 \approx 2p_1 \cdot p_2 + M^2$$
$$\Rightarrow 2p_1 \cdot p_2 = s - M^2$$

- ▶ Dla ustalonej energii w CMS zmienne x, y, ν, Q^2 nie są niezależne:

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu}, \quad y = \frac{2M}{s - M^2}\nu, \quad \Rightarrow \quad Q^2 = (s - M^2)xy$$

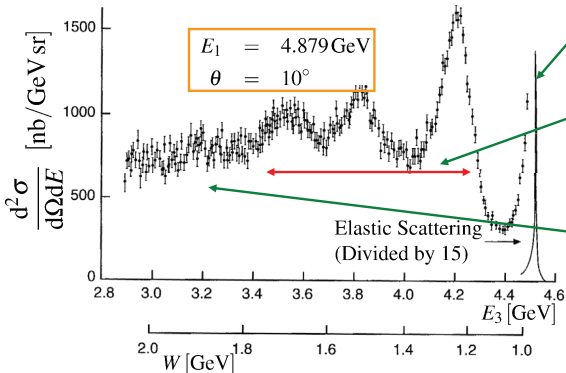
- ▶ Dla ustalonej energii w CMS kinematyka oddziaływania jest jednoznacznie określona za pomocą dwóch spośród trzech zmiennych (x, y, Q^2 lub x, ν, Q^2).

- ▶ W rozpraszaniu elastycznym ($x = 1$) tylko jedna zmienna jest niezależna - np. kąt rozproszenia elektronu.

Rozpraszanie nielastyczne elektron-proton

► Przykład: Rozpraszanie elektronów o energii $E_1 = 4.879$ GeV na protonach w spoczynku. Pomiar elektronów rozproszonych pod kątem $\theta = 10^\circ$. Kinematyka procesu jest w pełni określona przez pomiar energii i kąta rozproszonego elektronu.

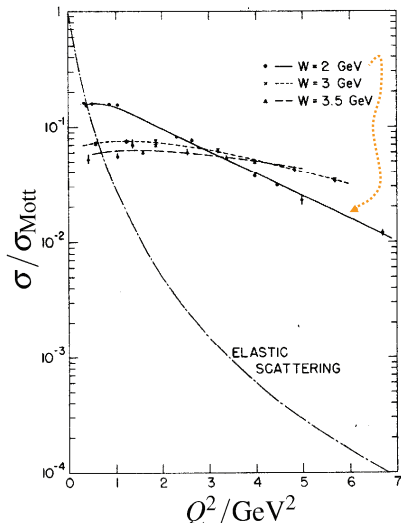
Masa inwariantna systemu hadronowego: $W^2 = M_X^2 = 10.06 - 2.03E_3$



- Rozpraszanie elastyczne
proton pozostaje nienaruszony $M_X = M$
- rozpraszanie nielastyczne
produkowane są stany wzbudzone protonu, np. $\Delta^+(1232)$, $W = M_\Delta$
- rozpraszanie głęboko nielastyczne (DIS)
proton zostaje rozbity, w stanie końcowym produkowanych jest wiele cząstek, duże W

Przekrój czynny na rozpraszanie nieelastyczne

► Aby otrzymać zależność przekroju czynnego od q^2 należy powtórzyć eksperyment przy różnych energiach padającego elektronu i zmierzyć elektron rozproszony pod różnymi kątami.



- Elastyczny przekrój czynny szybko maleje ze wzrostem q^2 ze względu na to, że proton nie jest cząstką punktową.
- Nieelastyczny przekrój czynny słabo zależy od q^2 .
- Głęboko nieelastyczny (DIS) przekrój czynny jest prawie niezależny od q^2 - rozpraszanie na punktowych obiektach wewnątrz protonu.

Od rozpraszania elastycznego do nieelastycznego

Elastyczny przekrój czynny zależy tylko od jednej zmiennej (w LAB kąt rozproszenia elektronu):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4 \theta/2} \frac{E_3}{E_1} \left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad \tau = \frac{Q^2}{4M^2}$$

W postaci Lorentzowsko niezmienniczej elastyczny przekrój czynny ma postać:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \left(1 - y - \frac{M^2 y^2}{Q^2} \right) + \frac{1}{2} y^2 G_M^2 \right]$$

co można zapisać w postaci:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left[f_2(Q^2) \left(1 - y - \frac{M^2 y^2}{Q^2} \right) + \frac{1}{2} y^2 f_1(Q^2) \right]$$

Do opisu rozpraszania nieelastycznego potrzebne są dwie niezależne zmienne kinematyczne (podwójnie różniczkowy przekrój czynny):

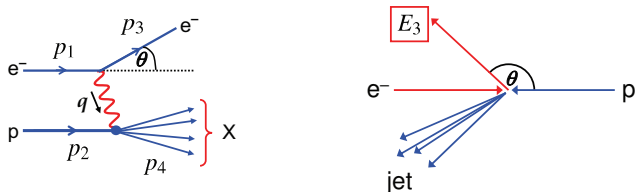
$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left[\left(1 - y - \frac{M^2 y^2}{Q^2} \right) \frac{F_2(x, Q^2)}{x} + y^2 F_1(x, Q^2) \right]$$

Rozpraszanie głęboko nieelastyczne

Czynniki struktury zostały zastąpione przez funkcje struktury, które nie mogą być interpretowane jako transformaty Fouriera rozkładów ładunku i momentu magnetycznego. Opisują one rozkład pędu kwarków w protonie.

W granicy wysokich energii (ściśle $Q^2 \gg M^2 y^2$) mamy:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left[(1-y) \frac{F_2(x, Q^2)}{x} + y^2 F_1(x, Q^2) \right]$$



$$Q^2 = 4E_1 E_3 \sin^2 \theta/2, \quad x = \frac{Q^2}{2M(E_1 - E_3)}, \quad y = 1 - \frac{E_3}{E_1}, \quad \nu = E_1 - E_3$$

W układzie LAB:

$$\frac{d^2\sigma}{dE_3 d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4 \theta/2} \left[\frac{1}{\nu} F_2(x, Q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{2}{M} F_1(x, Q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$F_2(x, Q^2)$ - elektromagnetyczna funkcja struktury; $F_1(x, Q^2)$ - magnetyczna f.s.

Skalowanie Bjorkena i relacje Callana-Grossa

► W celu określenia $F_1(x, Q^2)$ oraz $F_2(x, Q^2)$ dla danej pary (x, Q^2) konieczny jest pomiar różniczkowego przekroju czynnego przy różnych energiach padającego elektronu i kątach rozproszenia.

Eksperymentalnie obserwuje się, że F_1 i F_2 są prawie niezależne od Q^2 - tzw. skalowanie Bjorkena:

$$F_1(x, Q^2) \rightarrow F_1(x), \quad F_2(x, Q^2) \rightarrow F_2(x)$$

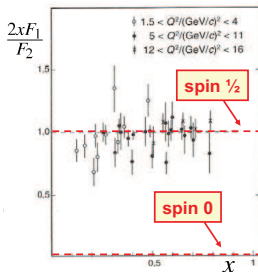
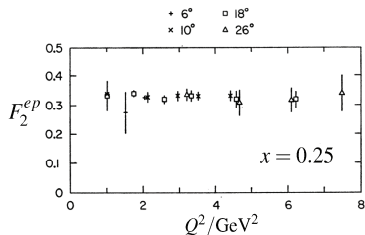
Sugeruje to że rozpraszanie zachodzi na punktowych obiektach w protonie.

Obserwuje się także związek (Callan'a - Gross'a):

$$F_2(x) = 2xF_1(x)$$

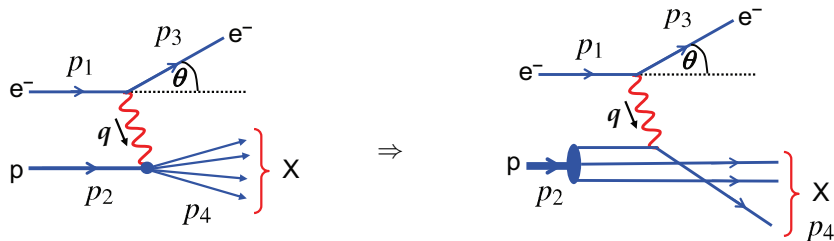
Jest to oczekiwany związek dla rozpraszania na kwarkach o spinie połówkowym.

Dla kwarków o spinie 0 mielibyśmy $F_1(x) = 0$



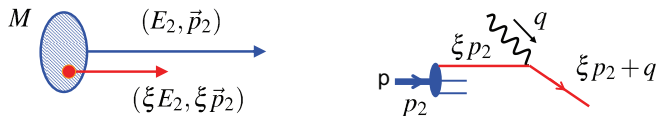
Model kwarkowo-partonowy

- ▶ Zanim jeszcze istnienie kwarków i gluonów zostało powszechnie uznane, Feynman zaproponował, że proton złożony jest z punktowych obiektów, tzw. **partonów**.
- ▶ Skalowanie Bjorkena i relacje Callana-Grossa można wyjaśnić zakładając, że rozpraszanie głęboko nieelastyczne zachodzi poprzez **elastyczne rozpraszanie elektronu na punktowych obiektach o spinie połówkowym**.



W **modelu kwarkowo-partonowym** fundamentalnym oddziaływaniem jest rozpraszanie elastyczne na quasi swobodnym kwarku o spinie $1/2$ (tzn. traktujemy kwarki jako swobodne cząstki).

- ▶ Model partonowy najwygodniej sformułować w układzie nieskończonego pędu protonu, gdzie $p_2 = (E_2, 0, 0, E_2)$. W tym układzie można zaniedbać masy kwarków oraz wszystkie pędy prostopadłe do kierunku protonu.
- ▶ Niech kwark niesie ułamek ξ czteropędu protonu:



- ▶ Po oddziaływaniu uderzony kwark ma czteropęd $\xi p_2 + q$

$$(\xi p_2 + q)^2 = m_q^2 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \xi^2 p_2^2 + q^2 + 2\xi p_2 \cdot q = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{Q^2}{2p_2 \cdot q} \equiv x$$

- ▶ Zmienna x Bjorkena jest ułamkiem pędu protonu niesionym przez uderzony kwark (w układzie w którym proton ma bardzo dużą energię, $E_2 \gg m_p$).

Model kwarkowo-partonowy

Zmienne kinematyczne w odniesieniu do pędu protonu:
(zaniedbujemy masy elektronu i protonu)

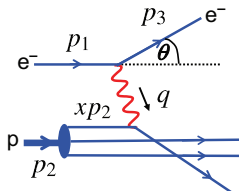
$$s = (p_1 + p_2)^2 \simeq 2p_1 \cdot p_2, \quad y = \frac{p_2 \cdot q}{p_2 \cdot p_2}, \quad x = \frac{Q^2}{2p_2 \cdot q}$$

Zmienne kinematyczne w odniesieniu do pędu kwarku:

$$s_q = (p_1 + xp_2)^2 = 2xp_1 \cdot p_2 = xs$$

$$y_q = \frac{p_q \cdot q}{p_q \cdot p_1} = \frac{xp_2 \cdot q}{xp_2 \cdot p_1} = y$$

$$x_q = 1 \quad (\text{r. elastyczne na kwarku})$$



Stosując wcześniej wyprowadzony przekrój czynny na rozpraszanie elastyczne $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ w granicy ultrarelatywistycznej, do procesu $e^- q \rightarrow e^- q$ mamy:

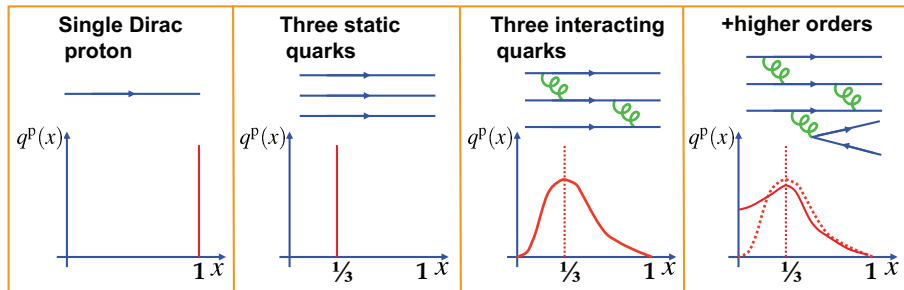
$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{2\pi\alpha^2 e_q^2}{q^4} \left[1 + \left(1 + \frac{q^2}{s_q} \right) \right]$$

Korzystając z: $-q^2 = Q^2 = (s_q - m^2)x_q y_q \Rightarrow \frac{q^2}{s_q} = -y_q = -y$

zapisujemy przekrój czynny w postaci: $\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2 e_q^2}{Q^4} [1 + (1 - y)^2]$

Model kwarkowo-partonowy

- ▶ Jest to wyrażenie na różniczkowy przekrój czynny na rozpraszanie elastyczne e^-q na kwarku niosącym ułamek pędu x protonu.
- ▶ W celu uwzględnienia rozkładu pędów kwarków w protonie definiujemy funkcje gęstości partonów $q^P(x)$ określającą liczbę kwarków typu q w protonie w zakresie pędów $(x, x + dx)$.
- ▶ Oczekiwana postać funkcji gęstości partonów:



- ▶ Przekrój czynny na rozpraszanie na ustalonym typie kwarków o pędach w zakresie $(x, x + dx)$:

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left[(1-y) + \frac{y^2}{2} \right] e_q^2 q^p(x) dx$$

- ▶ Sumując po wszystkich typach kwarków otrzymujemy przekrój czynny na rozpraszanie elektron-proton:

$$\frac{d^2\sigma^{ep}}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left[(1-y) + \frac{y^2}{2} \right] \sum_q e_q^2 q^p(x)$$

- ▶ Porównując z przekrojem czynnym wyrażonym za pomocą funkcji struktury:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left[\left(1 - y - \frac{M^2 y^2}{Q^2} \right) \frac{F_2(x, Q^2)}{x} + y^2 F_1(x, Q^2) \right]$$

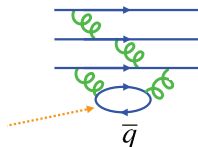
widać, że związek pomiędzy mierzonymi funkcjami struktury i rozkładami gęstości partonów w protonie ma postać:

$$F_2^p(x, Q^2) = 2xF_1^p(x, Q^2) = x \sum_q e_q^2 q^p(x)$$

- ▶ Skalowanie Bjorkena: $F_1(x, Q^2) \rightarrow F_1(x)$, $F_2(x, Q^2) \rightarrow F_2(x)$
 - ze względu na rozpraszanie na punktowych składnikach protonu,
- ▶ Relacja Callan'a-Gross'a: $F_2(x) = 2xF_1(x)$
 - ze względu na rozpraszanie na punktowych cząstkach Diraca o spinie połówkowym, w których moment magnetyczny jest bezpośrednio związany z ładunkiem, co oznacza, że człony elektromagnetyczny i czysto magnetyczny są ze sobą ściśle związane..
- ▶ Rozkłady gęstości partonów w protonie nie można wyliczyć w QCD ze względu na dużą stałą sprzężenia (nie można stosować rachunku zaburzeń).
- ▶ Rozkłady gęstości partonów w protonie można wyznaczyć z pomiarów funkcji struktury.
- ▶ Dla rozpraszania elektron proton mamy:

$$F_2^p(x) = x \sum_q e_q^2 q^p(x)$$

(ze względu na poprawki wyższych rzędów, proton zawiera nie tylko kwarki u i d , ale także antykwarki \bar{u} i \bar{d} i inne cięższe kwarki)



- ▶ Dla rozpraszania elektron-proton mamy:

$$F_2^{\text{ep}}(x) = x \sum_q e_q^2 q^p(x) = x \left(\frac{4}{9} u^p(x) + \frac{1}{9} d^p(x) + \frac{4}{9} \bar{u}^p(x) + \frac{1}{9} \bar{d}^p(x) \right)$$

- ▶ Dla rozpraszania elektron-neutron mamy:

$$F_2^{\text{en}}(x) = x \sum_q e_q^2 q^n(x) = x \left(\frac{4}{9} u^n(x) + \frac{1}{9} d^n(x) + \frac{4}{9} \bar{u}^n(x) + \frac{1}{9} \bar{d}^n(x) \right)$$

- ▶ Z symetrii izospinowej wynika, że

$$d^n(x) = u^p(x) \quad u^n(x) = d^p(x)$$

co pozwala na wprowadzenie definicji:

$$\begin{aligned} u(x) &\equiv u^p(x) = d^n(x), & d(x) &\equiv d^p(x) = u^n(x) \\ \bar{u}(x) &\equiv \bar{u}^p(x) = \bar{d}^n(x), & \bar{d}(x) &\equiv \bar{d}^p(x) = \bar{u}^n(x) \end{aligned}$$

- ▶ Ostatecznie mamy:

$$F_2^{\text{ep}}(x) = 2x F_1^{\text{ep}}(x) = x \left(\frac{4}{9} u(x) + \frac{1}{9} d(x) + \frac{4}{9} \bar{u}(x) + \frac{1}{9} \bar{d}(x) \right)$$

$$F_2^{\text{en}}(x) = 2x F_1^{\text{en}}(x) = x \left(\frac{4}{9} d(x) + \frac{1}{9} u(x) + \frac{4}{9} \bar{d}(x) + \frac{1}{9} \bar{u}(x) \right)$$

Przewidywania modelu partonowego

Całkując powyższe wyrażenia otrzymujemy:

$$\int_0^1 F_2^{\text{ep}}(x) dx = \int_0^1 x \left(\frac{4}{9}[u(x) + \bar{u}(x)] + \frac{1}{9}[d(x) + \bar{d}(x)] \right) dx = \frac{4}{9}f_u + \frac{1}{9}f_d$$

$$\int_0^1 F_2^{\text{en}}(x) dx = \int_0^1 x \left(\frac{4}{9}[d(x) + \bar{d}(x)] + \frac{1}{9}[u(x) + \bar{u}(x)] \right) dx = \frac{4}{9}f_d + \frac{1}{9}f_u$$

gdzie $f_u = \int_0^1 [xu(x) + x\bar{u}(x)] dx$ jest ułamkiem pędu protonu niesionym przez kwarki u i \bar{u} .

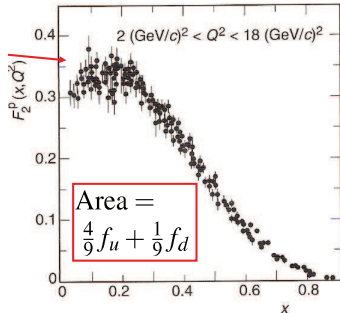
► Eksperymentalnie mamy:

$$\int F_2^{\text{ep}}(x) dx \approx 0.18, \quad \int F_2^{\text{en}}(x) dx \approx 0.12$$

$$\Rightarrow f_u \simeq 0.36, \quad f_d \simeq 0.18$$

- w protonie kwarki u niosą dwa razy więcej pędu niż kwarki d ,

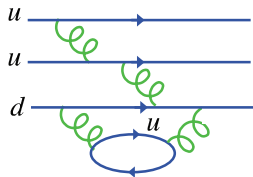
- kwarki niosą jedynie około połowy pędu protonu; pozostałą część pędu niosą gluony, które jednak nie oddziałują z fotonami.



- Funkcje gęstości partonów zawierają wkłady od kwarków walencyjnych i kwarków morza:

$$u(x) = u_V(x) + u_s(x) \quad d(x) = d_V(x) + d_S(x)$$

$$\bar{u}(x) = \bar{u}_S(x) \quad \bar{d}(x) = \bar{d}_S(x)$$



- Proton zawiera dwa kwarki walencyjne typu u i jeden typu d , dlatego PDFs normalizujemy tak, że

$$\int_0^1 u_V(x) dx = 2, \quad \int_0^1 d_V(x) dx = 1$$

Źródłem kwarków morza jest produkcja par kwark-antykwarik przez gluony. Zakładając, że $m_u = m_d$ można oczekiwać, że:

$$u_S(x) = \bar{u}_S(x) \approx d_S(x) = \bar{d}_S(x) \approx S(x)$$

Przy tych założeniach mamy:

$$F_2^{\text{ep}}(x) = x \left(\frac{4}{9} u_V(x) + \frac{1}{9} d_V(x) + \frac{10}{9} S(x) \right)$$

$$F_2^{\text{en}}(x) = x \left(\frac{4}{9} d_V(x) + \frac{1}{9} u_V(x) + \frac{10}{9} S(x) \right)$$

Co prowadzi do stosunku:

$$\frac{F_2^{en}(x)}{F_2^{ep}(x)} = \frac{4d_V(x) + u_V(x) + 10S(x)}{4u_V(x) + d_V(x) + 10S(x)}$$

► Źródłem kwarków morza są procesy typu $g \rightarrow \bar{u}u$. Ponieważ zależność propagatora gluonu jest typu $1/q^2$ więc produkcja niskoenergetycznych gluonów jest uprzywilejowana. Oczekujemy więc, że morze kwarków składa się z niskoenergetycznych q/\bar{q} .

► Oczekujemy, że dla małych x dominują kwarki morza:

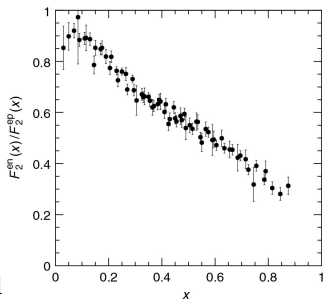
$$F_2^{en}/F_2^{ep} \rightarrow 1 \quad \text{dla } x \rightarrow 0$$

► Dla dużych x wkład od kwarków morza jest mały:

$$\frac{F_2^{en}}{F_2^{ep}} \rightarrow \frac{4d_V(x) + u_V(x)}{4u_V(x) + d_V(x)} \quad \text{dla } x \rightarrow 1$$

Dla $u_V = 2d_V$ stosunek ten jest równy $2/3$ dla $x \rightarrow 1$

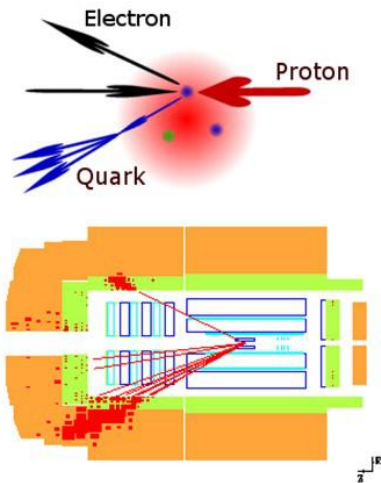
Eksperymentalnie $F_2^{en}/F_2^{ep} \rightarrow 1/4$ dla $x \rightarrow 1$ czyli $d(x)/u(x) \rightarrow 0$ dla $x \rightarrow 1$



Rozpraszanie głęboko nieelastyczne - eksperyment

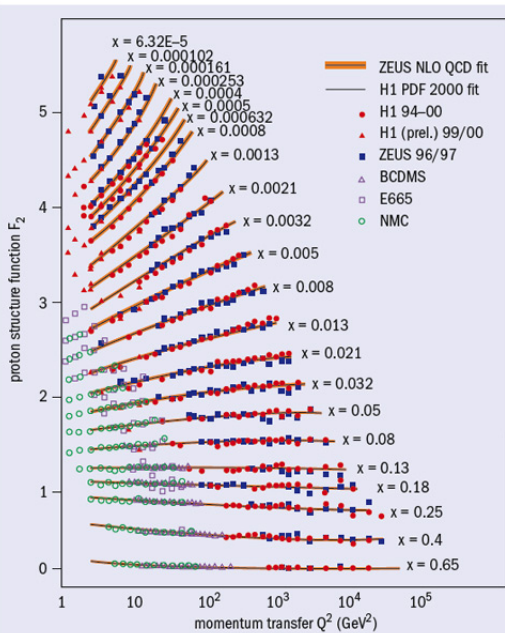
HERA: H1 i ZEUS

27.5 GeV (e) + 820(920) GeV (p)



Skalowanie Bjorkena:

$$\lambda \sim \hbar c / |Q| \Rightarrow r_q < 10^{-18} \text{ m}$$



Funkcje gęstości rozkładów partonów

Funkcje gęstości rozkładów partonów (PDF) otrzymuje się z fitów do danych eksperymentalnych.

- ▶ Z wyjątkiem dużych x zachodzi:

$$u_V(x) \approx 2d_V(x)$$

- ▶ Dla $x < 0.2$ dominują gluony,
- ▶ W fitach do danych zakładamy, że

$$u_S(x) = \bar{u}(x)$$

- ▶ $\bar{d}(x) > \bar{u}(x)$ - nie wiadomo dlaczego

Łamanie skalowania:

