Zestaw 3 / Wstęp do oddziaływań hadronów

1. Pokaż, że $[\,\hat{\vec{p}}^{\,2},\, \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}\,] = 0$, tzn. hamiltoniam w równaniu Schrödingera dla cząstki swobodnej komutuje z operatorem momentu pędu.

2. Pokaż, że relację Einsteina, $E^2 - p^2 = m^2$, można uzyskać z równania Diraca, $(\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0$, dla dowolnego spinora u_i dla cząstki swobodnej znalezionego na wykładzie.

3. Pokaż, że zachodzą tożsamości (a) $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$, oraz (b) $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$.

4. Wychodząc od równania Diraca w postaci $(\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0$, pokaż, że spinor dołączony $\bar{u}$ spełnia równanie $\bar{u}(\gamma^\mu p_\mu - m) = 0$. Następnie, nie używając jawnej postaci spinora u, pokaż, że zachodzą relacje: (a) $\bar{u}u = 2m$, oraz (b) $\bar{u}\gamma^\mu u = 2p^\mu$.

5. Pokaż, że operator helicity $\hat{h} = \dfrac{1}{2p}(\hat{\Sigma} \cdot \hat{\vec{p}}\,)$ komutuje z operatorem Hamiltona z równania Diraca $\hat{H}_D = \alpha \cdot \hat{\vec{p}} + \beta m$.

6. Pokaż, że zachodzą relacje: (a) $\hat{P}u_\uparrow(\theta, \phi) = u_\downarrow(\pi - \theta, \pi + \phi)$, (b) $\hat{C}\hat{P}u_\uparrow(\theta, \phi) = v_\downarrow)\pi - \theta, \pi + \phi)$.

7. Bez uciekania się do jawnej postaci macierzy gamma Diraca, pokaż, że macierz $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ ma następujące własności: (a) $(\gamma^5)^2 = 1$, (b) $\gamma^{5\,\dagger} = \gamma^5$, (c) $\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$.

8. Pokaż, że operator helicity można zapisać w postaci $\hat{h} = -\dfrac{1}{2p}(\gamma^0\gamma^5\vec{\gamma} \cdot \vec{p})$.

9. Wykorzystując amplitudy helicity, oblicz różniczkowy przekrój czynny na rozprasznanie $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ wykonując następujące kroki:

   (a) Korzystając z reguł Feynmana dla QED, pokaż że element macierzowy dla rozpraszanie $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ z wymianą pojedynczego fotonu ma postać:

$$M_{fi} = -\frac{e^2}{(p_1 - p_3)^2} g_{\mu\nu} \left[\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\right] \left[\bar{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)\right]$$

   gdzie p_1 i p_3 to początkowy i końcowy czteropęd e^-, a p_2 i p_4 to odpowiednie czteropędy μ^-.
   (b) Pokaż, że dla rozpraszania w układzie środka masy oraz przyjmując czteropędy padającego i rozproszonego elektronu jako $p_1^\mu = (E, 0, 0, p)$ i $p_3^\mu = (E_1, p\sin\theta, 0, p\cos\theta)$, prądy elektronowe dla różnych możliwych kombinacji helicity mają postać:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu u_\downarrow(p_1) &= 2(E_1 c, ps, -ips, pc) \\
\bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\mu u_\downarrow(p_1) &= 2(ms, 0, 0, 0) \\
\bar{u}_\uparrow(p_3)\gamma^\mu u_\uparrow(p_1) &= 2(E_1 c, ps, ips, pc) \\
\bar{u}_\downarrow(p_3)\gamma^\mu u_\uparrow(p_1) &= -2(ms, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

   gdzie m jest masą elektronu oraz $s \equiv \sin(\theta/2)$, $c \equiv \cos(\theta/2)$.
   (c) Oznaczając masę mionu przez M oraz energię mionu przez E_2 zapisz czteropędy początkowego i końcowego mionu, p_2 i p_4 oraz spinory $u_\uparrow(p_2)$, $u_\downarrow(p_2)$, $u_\uparrow(p_4)$ oraz $u_\downarrow(p_4)$ będące

stanami własnymi helicity. Porównujac spinory mionowe i elektronowe, wyjaśnij jak prądy mionowe można znaleźć bez dodatkowych obliczeń.:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_\downarrow(p_4)\gamma^\mu u_\downarrow(p_2) &= 2(E_2 c, -ps, -ips, -pc)\\
\bar{u}_\uparrow(p_4)\gamma^\mu u_\downarrow(p_2) &= 2(Ms, 0, 0, 0)\\
\bar{u}_\uparrow(p_4)\gamma^\mu u_\uparrow(p_2) &= 2(E_2 c, -ps, ips, -pc)\\
\bar{u}_\downarrow(p_4)\gamma^\mu u_\uparrow(p_2) &= -2(Ms, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

(d) Pokaż, że w granicy relatywistycznej ($E \gg M, m$) zachodzi $|M_{LL}|^2 = \dfrac{4e^2 s^2}{(p_1 - p_3)^4}$, gdzie $s = (p_1 + p_2)^2$.

(e) Znajdź podobne wyrażenie dla $|M_{RL}|^2$, $|M_{RR}|^2$ i $|M_{LR}|^2$. Dlaczego $|M_{RL}|^2$ znika dla $\theta = \pi$?

(f) Pokaż, że w granicy relatywistycznej różniczkowy przekrój czynny na rozpraszanie niespolaryzowanych elektronów i mionów, $\mathrm{e}^-\mu^- \to \mathrm{e}^-\mu^-$, w układzie środka masy ma postać:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{2\alpha^2}{s} \cdot \frac{1 + \frac{1}{4}(1 + \cos\theta)^2}{(1 - \cos\theta)^2}$$

(g) Pokaż, że uśredniony po spinach kwadrat elementu macierzowego można zapisać w postaci Lorentzowsko niezmienniczej:

$$\langle |M_{fi}|^2 \rangle = \frac{8e^4}{(p_1 - p_3)^4}\left[(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)\right]$$

a Lorentzowsko niezmienniczy przekrój czynny ma postać:

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}q^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{q^4}\left[1 + \left(1 + \frac{q^2}{s}\right)^2\right], \qquad \text{gdzie} \quad q^2 = (p_1 - p_2)^2$$