AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

rok zał. 1919

Rachunek operatorów Mikusińskiego

Piotr Szymczyk

Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej
Katedra Automatyki i Inżynierii Biomedycznej
Polskie Towarzystwo Matematyczne Odział Krakowski

Kraków, 06.12.2016

Piotr.Szymczyk@AGH.edu.pl

Plan prezentacji

- Wstęp
- Jan Mikusiński
- Splot
- Rachunek operatorów Mikusińskiego
- Przykład
- Podsumowanie
- Źródła
- Dyskusja

Wstęp

Rachunek operatorowy Mikusińskiego [42, 43]

Rachunek operatorowy Mikusińskiego jest najbardziej ogólną metodą obejmującą zarówno ciągłą jak i dyskretną teorię. Metodę przekształcenia $\mathscr{Z}$ można uważać jako szczególny przypadek szeregu operatora przesunięcia, zdefiniowanego przez Mikusińskiego. W operatorach współczynnikami liczbowymi są wartości funkcji w chwilach próbkowania a wykładniki wynoszą $0, T, 2T, \ldots, nT, \ldots$. Dla funkcji $[f(t)]$ możemy określić operator

$$f^* = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\,h^{nT} \qquad (1.226)$$

Fragment z książki: Eliahu I. Jury „Przekształcenie Z i jego zastosowania", WNT 1970

… „Rachunek operatorowy Mikusińskiego jest najbardziej ogólną metodą obejmującą zarówno ciągłą jak i dyskretną teorię." …

AGH

Jan Mikusiński

- Urodzony 03.04.1913 w Stanisławowie (obecnie Iwano-Frankowsk – zachodnia Ukraina)
- 03.12.1937 uzyskał stopień magistra matematyki na Uniwersytecie Poznańskim, gdzie pracował jako starszy asystent do wybuchu wojny
- W czasie okupacji niemieckiej Jan Geniusz Mikusiński przebywał w Zakopanym i w Krakowie
- W 1945 r., zaraz po wyzwoleniu, podjął pracę dydaktyczną i naukową na Uniwersytecie Jagiellońskim
- 25.07.1945 r. otrzymał stopień doktora filozofii na Uniwersytecie Jagiellońskim, po obronie rozprawy „O zagadnieniu interpolacji dla całek równań różniczkowych liniowych", której promotorem był prof. T.Ważewski
- 28.02.1946 r. habilitował się na Uniwersytecie Marii Skłodowskiej-Curie w Lublinie
- 10.12.1955 r. Jan Mikusiński otrzymał stopień doktora nauk matematycznych na podstawie prac pod wspólnym tytułem „Nowe ujęcie rachunku operatorów"
- 04.02.1958 r. otrzymał nominację na profesora zwyczajnego.
- Zmarł 27.07.1987 w Katowicach

Jan Mikusiński

- Wypromował 7 doktorów
- Dorobek
  - Opublikował ponad 150 prac naukowych w renomowanych czasopismach matematycznych w kraju i zagranicą
  - 11 książek, tłumaczonych na wiele języków
    - „Rachunek Operatorów", 1953 - 20 wydań w 6 językach, w tym 12 wydań w Japonii
    - „Wstęp do Analizy Matematycznej", 1957 – 2 wydania
    - „Teoria Miary i Całki Lebesgue'a", 1957 (z S. Hartmanem) – 2 wydania w 2 językach
    - „Elementarna Teoria Dystrybucji", 1957 (z R. Sikorskim) – wydana w 5 językach: polskim, angielskim, rosyjskim, chińskim i francuskim
    - „Theory of Distributions. The Sequentional Approach", 1973 (z P. Antosikiem i R. Sikorskim)
    - „The Bochner Integral", 1978
    - „O przyrządach optycznych osiowosymetrycznych",1979 (z K. Skórnik)
    - „Hypernumbers", 1983
    - „Operational Calcuslu", Volume II 1987 (z T. Boehme)
    - „From Number to Integral", 1993 (z P. Mikusińskim)
  - 4 skrypty
- Nagrody i wyróżnienia
  - 1950 r. – nagroda im. S. Banacha PTM za pracę w dziedzinie rachunku operatorów
  - 1953 r. – nagroda państwowa II stopnia
  - 1970 r. – doktorat honoris causa Uniwersytetu w Rostoku
  - 1975 r. – członkostwo w Serbskiej Akademii Nauki i Sztuki
  - 1983 r. – członkostwo honorowe PTM
  - 1985 r. – medal W. Sierpińskiego

Splot

Splotem funkcji $a(t)$ i $b(t)$ nazywamy funkcję $c(t)$ określoną przez całkę:

$$c(t) = \int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau$$

Symbolem $\mathcal{C}$ oznaczamy klasę funkcji, które są określone i ciągłe w przedziale $0 \leq t < \infty$. Funkcje klasy $\mathcal{C}$ mogą mieć wartości rzeczywiste lub zespolone.

Jeśli funkcje $a(t)$ i $b(t)$ są funkcjami klasy $\mathcal{C}$, to ich splot również należy do klasy $\mathcal{C}$, ponieważ jest funkcją określoną i ciągłą w przedziale $0 \leq t < \infty$.

Splot

Przemienność splotu:

$$\int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau = \int_0^t b(t-\tau)a(\tau)d\tau$$

Analogicznie do przemienności mnożenia liczb w arytmetyce:

$$ab = ba$$

Łączność splotu:

$\int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau = g(t)$ i $\int_0^t b(t-\tau)c(\tau)d\tau = h(t)$ to

$$\int_0^t g(t-\tau)c(\tau)d\tau = \int_0^t a(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

Własność tą dla liczb można wyrazić zdaniem:

Jeśli $ab = g$ i $bc = h$ to $gc = ah$.

Splot

Oprócz przemienności i łączności splot ma jeszcze trzecią podstawową własność iloczynu, czyli **rozdzielność względem dodawania**: $a(b+c) = ab + ac$

ponieważ

$$\int_0^t a(t-\tau)[b(\tau)+c(\tau)]d\tau = \int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau + \int_0^t a(t-\tau)c(\tau)d\tau$$

Analogicznie mamy prawo **rozdzielczości** splotu **względem odejmowania**: $a(b-c) = ab - ac$

ponieważ

$$\int_0^t a(t-\tau)[b(\tau)-c(\tau)]d\tau = \int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau - \int_0^t a(t-\tau)c(\tau)d\tau$$

Funkcje a wartość funkcji

Używanie w rachunku operatorowym znakowania takiego jak w zwykłej algebrze jest ogromnym ułatwieniem, pozwala bowiem wykorzystać nabyte przyzwyczajenia i skomplikowane nieraz przekształcenia całek zastąpić przez mechaniczne niemal rachunki.

Funkcja a wartość funkcji

Istnieje pewne niebezpieczeństwo nieścisłości przy tak skróconym zapisie. Na przykład gdy chcemy skrótowo zapisać splot dwóch funkcji stałych o wartościach 2 i 3.

Wtedy w arytmetyce zapis $2 * 3$ oznacza liczbę 6, a w rachunku operatorów funkcję $\int_0^t 2 * 3 d\tau = 6t$.

Aby uniknąć nieporozumień wprowadzono następujący zapis: symbol $\{2\}\{3\}$ oznacza splot *funkcji 2* z *funkcją 3*, to znaczy *funkcję 6t*.

Czyli: $2 * 3 = 6$ i $\{2\} * \{3\} = \{6t\}$.

Symbolika

Mamy ogólne wzory:

$$\{a(t)\} + \{b(t)\} = \{a(t) + b(t)\}$$

(dodawanie funkcji jest dodawaniem ich wartości)

$$\{a(t)\} * \{b(t)\} = \left\{ \int_0^t a(t-\tau) b(\tau) d\tau \right\}$$

Zapis funkcji w postaci $\{f(t)\}$ może być uciążliwy. W związku z tym jeśli funkcja nie jest dana konkretnie lecz zapisywana symbolem ogólnym to w skrócie można używać samej litery, czyli:

$$f = \{f(t)\}$$

Wygodne jest również wprowadzenie następującego znakowania:

$$a^2 = a * a$$
$$a^3 = a * a * a$$
$$a^4 = a * a * a * a$$

Jeśli m i n są liczbami naturalnymi to mamy ogólne wzory:

$$a^m a^n = a^{m+n}, \qquad a^n b^n = (ab)^n, \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

Operator całkowy

Zgodnie z definicją splotu:

$$\{1\}\{f(t)\} = \left\{ \int_0^t f(\tau)d\tau \right\}$$

Jak widać funkcja $\{1\}$ wyróżnia się tym, że utworzenie jej splotu z dowolną funkcją powoduje scałkowanie tej funkcji w granicach od 0 do t.

Z tego powodu funkcję $\{1\}$ będziemy nazywać ***operatorem całkowym***.
Dla skrócenia zapisu wprowadza się dla jej oznaczenia literę l:

$$l = \{1\}$$

Kolejne potęgi operatora całkowego mają postać:

$$l^2 = \left\{\frac{t}{1}\right\}, \qquad l^3 = \left\{\frac{t^2}{1*2}\right\}, \qquad l^4 = \left\{\frac{t^3}{1*2*3}\right\}$$

Można zapisać ogólny wzór: $l^n = \left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\}$

Jeśli przyjmiemy, że $0! = 1$ to wzór ten jest prawdziwy dla $n \geq 1$.

Twierdzenie Titchmarsha

Jeśli funkcje f i g klasy $\mathcal{C}$ nie są tożsamościowo równe zeru, to ich splot również nie jest tożsamościowo równy zeru.

Dowód tego twierdzenia oparty wyłącznie na metodach funkcji zmiennej rzeczywistej podał C. Ryll-Nardzewski w 1952 roku – jest podany w rozdziale drugim książki: Mikusiński J., *Operational calculus*, PWN - Pergamon Press, London, Warszawa, New York 1966

Działanie odwrotne do splotu

Podobnie jak w algebrze tak i w rachunku operatorów można wprowadzić ułamki: $\frac{a}{b}$ (dla wygody można zapisywać w postaci a/b).

Jeżeli a i b są funkcjami i przez ab rozumiemy ich splot, to przez a/b należy rozumieć działanie odwrotne do splotu.

Symbol a/b (gdzie b nie jest tożsamościowo zerem) będzie wówczas oznaczał funkcję c, taką że:

$$a = bc \tag{1}$$

Jeśli $a = \{t^3\}$ i $b = \{t\}$

to $\frac{a}{b} = \frac{\{t^3\}}{\{t\}} = \{6t\}$

gdyż $\{t\}\{6t\} = \left\{\int_0^t (t-\tau)6\tau d\tau\right\} = \left\{6t\int_0^t \tau d\tau - 6\int_0^t \tau^2 d\tau\right\} =$

$$= \left\{6t\,\frac{\tau^2}{2}\Big|_0^t - 6\,\frac{\tau^3}{3}\Big|_0^t\right\} = \{3t^3 - 2t^3\} = \{t^3\}$$

Działanie odwrotne do splotu

$$a = bc \qquad (1)$$

Aby definicja symbolu a/b była jednoznaczna, potrzeba aby przy zadanych a i b (b nie równe tożsamościowo zeru) istniała co najwyżej jedna funkcja c spełniająca równość (1).

Jednoznaczność tę zapewnia twierdzenie Titchmarsha.

Gdyby równość (1) była spełniona przez dwie różne funkcje c_1 i c_2 to znaczy $a = bc_1$ i $a = bc_2$ to mielibyśmy $b(c_1 - c_2) = 0$ i splot dwóch funkcji b i $(c_1 - c_2)$ nie równych tożsamościowo zeru, byłby równy zero, wbrew twierdzeniu Titchmarsha.

Zatem równość (1) może być spełniona co najwyżej przez jedną funkcję c, co dowodzi jednoznaczności symbolu a/b.

Operatory jako uogólnienie pojęcia funkcji

Może się zdarzyć, że dla danych funkcji a i $b \neq \{0\}$ klasy $\mathcal{C}$ nie istnieje funkcja c, która spełniałaby równanie: $a = bc$.

Na przykład, gdy $a = b = \{1\}$ nie może zachodzić równość $\{1\} = \{1\}\,c$ dla żadnej funkcji $c = \{c(t)\}$ bo oznaczałoby to że $1 = \int_0^t c(\tau)d\tau$ dla każdego $t \geq 0$. A to jest nieprawdą już dla $t = 0$.

Ze zjawiskiem nie wykonywalności działania odwrotnego spotykamy się już na elementarnym szczeblu matematyki.

Na przykład w arytmetyce liczb całkowitych nie zawsze dzielenie jest wykonalne. Niewykonalność dzielenia jest źródłem nowego rodzaju liczb – ułamków. Każda liczba całkowita jest ułamkiem, ale nie każdy ułamek jest liczbą całkowitą.

Operatory jako uogólnienie pojęcia funkcji

Podobnie:

Niewykonalność działania odwrotnego do splotu prowadzi do nowego pojęcia matematycznego, jakim są operatory.

Ułamek $\{1\}/\{1\}$ przedstawia więc *operator*, który nie jest funkcją.

Jeśli dla dwóch funkcji a i $b \neq 0$ klasy $\mathcal{C}$ nie istnieje funkcja c, spełniająca równanie $a = bc$, to ułamek a/b przedstawia *operator*.

Dopuszczamy również takie operatory, dla których istnieje taka funkcja c klasy $\mathcal{C}$, że $a = bc$.

Dzięki temu operatory można uważać za uogólnienie pojęcia funkcji.

Każda funkcja jest operatorem, ale nie każdy operator jest funkcją.

Działania na operatorach

W zwykłej arytmetyce przyjmuje się dla ułamków definicje:

A. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ad = bc$

B. $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

C. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

Zakładamy, że mianowniki b i d są różne od zera.

Dla operatorów a/b przyjmuje się takie same definicje A, B i C. Oczywiście w przypadków operatorów litery a, b, c i d nie oznaczają już liczb całkowitych lecz funkcje klasy $\mathcal{C}$.

Zakładamy, że funkcje b i d są różne tożsamościowo od zera, a z twierdzenia Titchmarsha wynika, że również mianownik bd nie jest tożsamościowo zerem.

Dzięki zupełnej analogii operatorów z ułamkami klasycznej arytmetyki rachunki na operatorach wykonuje się tak samo jak na zwykłych ułamkach.

Operatory liczbowe

Operatory w postaci $\frac{\{\alpha\}}{\{1\}}$, gdzie $\{\alpha\}$ jest dowolną funkcją stałą (przyjmującą wszędzie wartość α) oznaczamy symbolem $[\alpha] = \frac{\{\alpha\}}{\{1\}}$.

Mamy następujące wzory:

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta], \qquad [\alpha][\beta] = [\alpha\beta].$$

Pisząc dla uproszczenia $l = \{1\}$ mamy:

$$[\alpha] + [\beta] = \frac{\{\alpha\}}{l} + \frac{\{\beta\}}{l} = \frac{\{\alpha\}+\{\beta\}}{l} = \frac{\{\alpha+\beta\}}{l} = [\alpha + \beta],$$

$$[\alpha][\beta] = \frac{\{\alpha\}}{l}\frac{\{\beta\}}{l} = \frac{\{\alpha\beta t\}}{l^2} = \frac{l\{\alpha\beta\}}{l^2} = \frac{\{\alpha\beta\}}{l} = [\alpha\beta].$$

Operatory typu $[\alpha]$ będziemy nazywali *operatorami liczbowymi*.

Należy je odróżnić od operatorów $\{\alpha\}$, które są funkcjami stałymi i dla których zachodzą wzory: $\{\alpha\} + \{\beta\} = \{\alpha + \beta\}$, $\{\alpha\}\{\beta\} = \{\alpha\beta t\}$.

Przykład: $[2][3] = [6]$, $\{2\}\{3\} = \{6t\}$.

Można opuścić nawiasy $[\ ]$ i zamiast $[\alpha]$ pisać α.

Operator jako uogólnienie pojęcia liczby zespolonej

Operatory liczbowe zachowują się w rachunkach jak zwykłe liczby, można je nazywać po prostu liczbami.

Operatory stanowią nie tylko uogólnienie pojęcia funkcji, ale jednocześnie uogólniają liczby zespolone.

$$\mathit{liczby\ całkowite} \subset \mathit{liczby\ wymierne} \subset \mathit{liczby\ rzeczywiste} \subset$$
$$\subset \mathit{liczby\ zespolone} \subset \mathit{operatory}$$

Jeżeli operatory a/b i c/d redukują się do funkcji to wyrażenie $\frac{a}{b} * \frac{c}{d}$ oznacza ich splot, a jeżeli redukują się do liczb, to wyrażenie to oznacza zwykły iloczyn.

Iloczyn liczby i funkcji

Dla dowolnej liczby α i dowolnej funkcji $\{\beta\}$ zachodzi wzór:

$$\alpha\{\beta\} = \{\alpha\beta\} \qquad (2)$$

Ponieważ: $\alpha\{\beta\} = \frac{\{\alpha\}\{\beta\}}{l} = \frac{\{\alpha\beta t\}}{l} = \frac{l\{\alpha\beta\}}{l} = \{\alpha\beta\}$

Iloczyn dwóch liczb jest liczbą: $2 * 3 = 6$,

Iloczyn liczby i funkcji stałej jest funkcją stałą: $2\{3\} = \{6\}$,

Iloczyn (splot) dwóch funkcji jest funkcją: $\{2\}\{3\} = \{6t\}$

W szczególnym przypadku wzór (2) dla $\beta = 1$ przyjmuje postać: $\alpha l = \{\alpha\}$

Każda funkcja stała daje się wyrazić jako iloczyn liczby i operatora całkowego.

Pomnożenie funkcji przez liczbę oznacza to samo co pomnożenie jej wartości przez liczbą: $\alpha\{f(t)\} = \{\alpha f(t)\}$ (3)

Dla operatorów tego typu zachodzi, na podstawie praw przemienności i łączności:

$$(\alpha + \{f(t)\}) + (\beta + \{g(t)\}) = \alpha\beta + \left\{\beta f(t) + \alpha g(t) + \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\}$$

Liczby 0 i 1

Zastępując we wzorze (3) α przez 1 otrzymujemy równość: $1\{f(t)\} = \{f(t)\}$.

Jeśli c jest dowolnym operatorem to zawsze zachodzi równość: $1c = c$ ponieważ pisząc $1 = l/l$ i $c = a/b$, gdzie a i b są funkcjami klasy $\mathcal{C}$ mamy $1c = {}^{la}/_{lb} = a/b$.

Dla liczby 0 prawdziwe są wzory:

$$0c = 0 \text{ i } c + 0 = 0$$

ponieważ pisząc $0 = {}^{\{0\}}/_{l}$ i $c = a/b$ gdzie a i $b \neq \{0\}$ są funkcjami klasy $\mathcal{C}$,

otrzymujemy: $0c = \frac{\{0\}a}{lb} = \frac{\{0\}}{lb} = \frac{\{0\}b}{lb} = \frac{\{0\}}{l} = 0$

oraz: $c + 0 = \frac{a}{b} + \frac{\{0\}}{l} = \frac{al + \{0\}b}{bl} = \frac{al + \{0\}}{bl} = \frac{al}{bl} = \frac{a}{b} = c$

Można zauważyć, że: $\{0\} = 0$

Jest to jedyna funkcja, która posiada wobec dodawania i mnożenia te same własności co liczba 0. Na tym polega identyczność symboli $\{0\}$ i 0.

Operator różniczkowy

Podstawową rolę w rachunku operatorów gra odwrotność operatora całkowego $l = \{1\}$, którą oznaczać będziemy przez:

$$s = \frac{1}{l}$$

Wobec tej definicji mamy:

$$ls = sl = 1$$

Twierdzenie: *Jeżeli funkcja* $a = \{a(t)\}$ *ma pochodną* $a' = \{a'(t)\}$ *ciągłą dla* $0 \leq t < \infty$, *to zachodzi wzór:*

$$sa = a' + a(0),$$

gdzie $a(0)$ *jest wartością funkcji w punkcie* $t = 0$.

Operator różniczkowy

Jeśli funkcja a jest równa zeru w punkcie $t = 0$, to wzór redukuje się do postaci:

$$sa = a'$$

W tym przypadku mnożenie funkcji przez operator s oznacza po prostu jej różniczkowanie. Z tego powodu s będziemy nazywać ***operatorem różniczkowym***.

Przez operator różniczkowy można mnożyć nie tylko funkcje różniczkowalne. Iloczyn sa będzie miał sens, bez względu na to, czy a jest funkcją różniczkowalną, nieróżniczkowalną, czy zgoła dowolnym operatorem.

Przykłady:

$$s\{\sin t\} = \{\cos t\}, \qquad s\{e^t\} = \{e^t\} + 1,$$

$$s\{t+1\} = \{1\} + 1, \quad s\{t^n\} = \{nt^{n-1}\} \; dla \; n \geq 1.$$

Potęgi operatora *s*

Jeżeli funkcja $a = \{a(t)\}$ ma drugą pochodną $a'' = \{a''(t)\}$ ciągłą w przedziale $0 \leq t \leq \infty$, to mnożąc przez s otrzymamy:

$$s^2 a = sa' + sa(0)$$

Stąd stosując wzór dla pochodnej a' mamy:

$$s^2 a = a'' + a'(0) + sa(0)$$

Można to uogólnić w postaci twierdzenia:

Twierdzenie: *Jeżeli funkcja* $a = \{a(t)\}$ *ma n-tą pochodną*

$a^{(n)} = \{a^{(n)}(t)\}$ *ciągłą w przedziale* $0 \leq t \leq \infty$ *to*

$$s^n a = a^{(n)} + a^{(n-1)}(0) + sa^{(n-2)}(0) + \cdots + s^{n-1} a(0)$$

Powyższy wzór można też zapisać w następującej postaci:

$$a^{(n)} = s^n a - s^{n-1} a(0) - \cdots - sa^{(n-2)}(0) - a^{(n-1)}(0)$$

Wielomiany operatora *s*

Ważną rolę w zastosowaniach grają operatory w postaci wielomianów:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

gdzie $a_n, \ldots, a_0$ są dowolnymi liczbami.

Działania na tych wielomianach wykonuje się tak samo jak w zwykłej algebrze.

Na przykład:

$$(s-1)(s^{n-1} + s^{n-2} + \cdots + 1) = s^n - 1$$

Dwa wielomiany operatora s są sobie równe, to mają współczynniki odpowiednio równe:

$$\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0 = \beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta$$

$$\alpha_n = \beta_n, \ \ \alpha_{n-1} = \beta_{n-1}, \ \ \ldots, \ \ \alpha_1 = \beta_1, \ \ \alpha_0 = \beta_0.$$

Piotr.Szymczyk@AGH.edu.pl

Związki operatora *s* z funkcją wykładniczą

Stosując wzór $sa = a' + a(0)$, do funkcji $\{e^{\alpha t}\}$ otrzymujemy równość: $s\{e^{\alpha t}\} = 1 + \alpha\{e^{\alpha t}\}$

stąd otrzymujemy: $\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s-\alpha}$

Na podstawie splotu mamy:

$$\frac{1}{(s-\alpha)^2} = \{e^{\alpha t}\}^2 = \left\{\int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} e^{\alpha\tau} d\tau\right\} = \left\{e^{\alpha\tau}\int_0^t d\tau\right\} = \left\{\frac{t}{1!}e^{\alpha t}\right\}$$

$$\frac{1}{(s-\alpha)^3} = \{e^{\alpha t}\}\left\{\frac{t}{1!}e^{\alpha t}\right\} = \left\{\int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} \frac{\tau}{1!} d\tau\right\} = \left\{e^{\alpha\tau}\int_0^t \frac{\tau}{1!} d\tau\right\} = \left\{\frac{t^2}{2!}e^{\alpha t}\right\}$$

i ogólnie:

$$\frac{1}{(s-\alpha)^n} = \left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}\right\}$$

Związki operatora *s* z funkcjami trygonometrycznymi

Na postawie wzorów Eulera:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

oraz wzorów z poprzedniego slajdu można wyprowadzić wzory:

$$\frac{1}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} = \left\{\frac{1}{\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t\right\} \quad (\beta > 0),$$

$$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} = \{e^{\alpha t} \cos \beta t\}$$

Ważne są również następujące szczególne przypadki powyższych wzorów:

$$\frac{1}{s^2 + \beta^2} = \left\{\frac{1}{\beta} \sin \beta t\right\}, \qquad \frac{s}{s^2 + \beta^2} = \{\cos \beta t\}$$

Wyrażenia wymierne operatora *s*

Z algebry wiadomo, że każde wyrażenie

$$\frac{\gamma_m s^m + \cdots + \gamma_1 s + \gamma_0}{\delta_n s^n + \cdots + \delta_1 s + \delta_0} \qquad (4)$$

gdzie $\gamma_m, \ldots, \gamma_0$ i $\delta_n, \ldots, \delta_0$ są liczbami rzeczywistymi, daje się rozbić na ułamki proste:

$$\frac{1}{(s-\alpha)^p} \qquad \frac{1}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^p} \qquad \frac{s}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^p}$$

gdzie α i β są liczbami rzeczywistymi a p liczbą naturalną

Każde wyrażenie wymierne (4) daje się przez rozkład na ułamki proste sprowadzić do funkcji wykładniczej i do funkcji trygonometrycznych.

Przy rozkładzie na ułamki proste najlepiej stosować, podobnie jak w rachunku całkowym, metodę współczynników nieoznaczonych.

Przykład:

$$\frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)} = \frac{1}{s-1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{3}{(s+1)^2+4} = \left\{e^t - e^{-t}\cos 2t + \frac{3}{2}e^{-t}\sin 2t\right\}$$

Wzory z rachunku operatorów

$$\{a(t)\} + \{b(t)\} = \{a(t) + b(t)\}$$

$$\{a(t)\} \cdot \{b(t)\} = \left\{ \int_0^t a(t-\tau)\, b(\tau)\, d\tau \right\}$$

$$\alpha\{f(t)\} = \{\alpha f(t)\} \qquad (\alpha \text{ liczba})$$

$$s\{a(t)\} = \{a'(t)\} + a(0)$$

$$\{a^{(n)}(t)\} = s^n\{a(t)\} - s^{n-1}a(0) - \ldots - s a^{(n-2)}(0) - a^{(n-1)}(0)$$

$$T^\alpha\{a(t)\} = \{e^{\alpha t} a(t)\}, \qquad T^\alpha R(s) = R(s-\alpha)$$

$$\frac{d}{ds}\{a(t)\} = \{-t a(t)\}$$

$$e^{-\lambda s}\{f(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 & \text{dla } 0 \leqslant t < \lambda \\ f(t-\lambda) & \text{dla } 0 \leqslant \lambda < t \end{Bmatrix}$$

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\lambda s} f(\lambda)\, d\lambda = \begin{Bmatrix} f(t) & \text{w przedziale } 0 \leqslant \lambda_1 < t < \lambda_2 \\ 0 & \text{poza tym przedziałem} \end{Bmatrix}$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s} f(\lambda)\, d\lambda = \{f(t)\}$$

Wzory z rachunku operatorów

$$\frac{1}{s} = \{1\}$$

$$\frac{1}{s^n} = \left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

$$\frac{1}{s^\lambda} = \left\{\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\right\} \qquad (\lambda>0)$$

$$\frac{1}{\sqrt{s}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right\}$$

$$\frac{1}{s-\alpha} = \{e^{\alpha t}\}$$

$$\frac{1}{(s-\alpha)^\lambda} = \left\{\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}e^{\alpha t}\right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{s+\alpha}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\alpha t}\right\}$$

$$\frac{1}{s\sqrt{s+\alpha}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{erf}\sqrt{\alpha t}\right\} \qquad (\alpha>0)$$

$$\frac{1}{s^2+\beta^2} = \left\{\frac{1}{\beta}\sin\beta t\right\} \qquad (\beta>0)$$

$$\frac{s}{s^2+\beta^2} = \{\cos\beta t\}$$

$$\frac{1}{s^2-\beta^2} = \left\{\frac{1}{\beta}\operatorname{sh}\beta t\right\} \qquad (\beta>0)$$

$$\frac{s}{s^2-\beta^2} = \{\operatorname{ch}\beta t\}$$

$$\frac{1}{(s-\alpha)^2+\beta^2} = \left\{\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\sin\beta t\right\} \qquad (\alpha>0)$$

$$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2} = \{e^{\alpha t}\cos\beta t\}$$

$$\frac{1}{(s-\alpha)^2-\beta^2} = \left\{\frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\operatorname{sh}\beta t\right\} \qquad (\beta>0)$$

$$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2-\beta^2} = \{e^{\alpha t}\operatorname{ch}\beta t\}$$

$$\frac{1}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2} = \left\{\frac{e^{\alpha t}}{2\beta^2}\left[\frac{1}{\beta}\sin\beta t - t\cos\beta t\right]\right\} \qquad (\beta>0)$$

$$\frac{1}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^3} = \left\{\frac{e^{\alpha t}}{4\beta^4}\left[\left(\frac{3}{2}-\frac{\beta^2t^2}{2}\right)\frac{1}{\beta}\sin\beta t - \frac{3}{2}t\cos\beta t\right]\right\}$$

$$\frac{s}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2} = \left\{\frac{e^{\alpha t}}{2\beta^2}\left[(\alpha+\beta^2 t)\frac{1}{\beta}\sin\beta t - \alpha t\cos\beta t\right]\right\}$$

Przykładowe zadanie

Zadanie

Znaleźć rozwiązanie $x(t)$ równania różniczkowego: $x' - x = (2t-1)e^{t^2}$ takie, że $x(0) = 2$.

Rozwiązanie

Z warunku początkowego mamy: $x' = sx - 2$

stąd $sx - x = 2 + f$

gdzie $f = \{(2t-1)e^{t^2}\}$

zatem $x = \frac{2+f}{s-1} = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-1}f = \{2e^t\} + \{e^t\}\{(2t-1)e^{t^2}\} =$

$$= \left\{2e^t + \int_0^t e^{t-\tau}(2\tau-1)e^{\tau^2}d\tau\right\} = \left|\begin{array}{c} y = \tau^2 - \tau \\ dy = (2\tau-1)d\tau \end{array}\right| =$$

$$= \left\{2e^t + e^t e^y \Big|_0^t\right\} = \left\{e^t + e^{t^2}\right\}$$

Porównanie metody bezpośredniej i metody transformacji Laplace'a

Formalne podobieństwo metody transformacji Laplace'a i metody bezpośredniej można bliżej sprecyzować przez ustalenie pewnego *izomorfizmu*, co można też pokazać na następującym przykładzie:

Transformacja Laplace'a funkcji e^t jest następująca:

$$\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1} \qquad (5)$$

W metodzie bezpośredniej mamy wzór:

$$\{e^t\} = \frac{1}{s-1} \qquad (6)$$

We wzorze (5) litera s jest zmienną zespoloną, a we wzorze (6) s jest operatorem różniczkowym. Funkcji analitycznej $\frac{1}{s-1}$ ze wzoru (5) odpowiada operator $\frac{1}{s-1}$ ze wzoru (6).

W rachunkach formalnych symbol $\frac{1}{s-1}$ traktujemy w obu przypadkach tak samo.

Porównanie metody bezpośredniej i metody transformacji Laplace'a

Mimo formalnego podobieństwa metody transformacji Laplace'a i metody bezpośredniej, metody te nie są równoważne.

Na przykład równanie $x'(t) - x(t) = e^t$ można rozwiązać obydwoma metodami, ale jeśli funkcję e^t zastąpimy funkcją $(2t-1)e^{t^2}$ (tak jak w przykładowym zadaniu prezentowanym wcześniej) to stosowanie transformacji Laplace'a stanie się niemożliwe z powodu rozbieżności całki: $\int_0^\infty e^{-ts}(2t-1)e^{t^2}dt$

Metoda ta ogranicza więc zakres stosowalności rachunku operatorów do klasy funkcji dla których całka $\int_0^\infty e^{-ts} f(t)dt$ jest zbieżna.

Ale nawet gdy pozostawimy funkcję e^t to metoda transformacji Laplace'a nie daje pełnego rozwiązania zagadnienia ponieważ w czasie prowadzenia rachunków trzeba założyć, że szukana funkcja nie wzrasta zbyt szybko (jest transformowalna). Wskutek tego nie wiemy czy znalezione rozwiązanie jest jedyne.

Szereg operatora przesunięcia

Metodę przekształcenia Ƶ można uważać jako szczególny przypadek operatora przesunięcia zdefiniowanego przez Mikusińskiego.

W operatorach współczynnikami liczbowymi są wartości funkcji w chwilach próbkowania $0, T, 2T, \dots, nT, \dots$.

Dla funkcji $[f(t)]$ możemy określić operator:

$$f^* = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) h^{nT}$$

Można wyprowadzić równoważność między operatorem f^* a przekształceniem Ƶ:

$$F(z) = Ƶ\{f[n]\} = \sum_{0}^{\infty} f[n] z^{-n}$$

Podsumowanie

- Przedstawione rozważania pokazują, że metoda operatorów Mikusińskiego jest alternatywna do metod transformacji całkowych
- Metoda ta nie wymaga wyznaczania całki niewłaściwej co w wielu przypadkach jest znacznym uproszczeniem rachunków
- Metodę Mikusińskiego można z powodzeniem zastosować do równań różniczkowych
- Rachunek operatorów Mikusińskiego jest najbardziej ogólną metodą obejmującą zarówno ciągłą jak i dyskretną teorię.

Źródła

- Książki:
  - Jan Mikusiński: „Rachunek operatorów”, PTM, Warszawa 1953
  - Eliahu I. Jury: „Przekształcenie Z i jego zastosowania”, WNT 1970
- Artykuły:
  - Mariusz Poński: „Zastosowanie rachunku operatorów Mikusińskiego w pewnych zagadnieniach dynamiki konstrukcji”, ???
  - Tomasz Kochanek: „Rachunek operatorowy Mikusińskiego i jego zastosowanie do równań różniczkowych”, ???
- Prezentacja:
  - Krystyna Skórnik: „Profesor Jan Mikusiński - 100 rocznica urodzin”, Katowice, 16 listopada 2013
- Internet:
  - http://www.math.us.edu.pl/instytut/historia/mikusinski/mikusinski.html

Dyskusja

Dodatek
Transformacje całkowe

Transformacja całkowa jest zdefiniowana następująco:

$$(Tf)(u) = \int_{t_1}^{t_2} K(t,u) f(t) dt$$

gdzie K jest jądrem funkcji dwóch zmiennych lub jądrem transformacji T.

Odwrotna transformacja całkowa zdefiniowana jest następująco:

$$t(t) = \int_{u_1}^{u_2} K^{-1}(u,t)\big(Tf(u)\big) du$$

Ideą przekształceń całkowych jest przeniesienie równań różniczkowo-całkowych z obszaru zmiennej rzeczywistej do obszaru zmiennej zespolonej. Umożliwia to otrzymanie prostszych równań dzięki temu mogą one być rozwiązywane prostszymi metodami.

Dodatek
Transformacje całkowe

- Transformacja Fouriera
- Transformacja Fouriera sinusowa
- Transformacja Fouriera cosinusowa
- Transformacja sprzężona Fouriera
- Transformacja Hartley'a
- Transformacja Mellina
- Transformacja Laplace'a
- Transformacja dwustronna Laplace'a
- Transformacja Weierstrassa
- Transformacja Hankela
- Transformacja Abela
- Transformacja Hilberta
- Transformacja Poissona
- Transformacja FRFT (fractional Fourier transform)
- Transformacja Batemana
- Transformacja falkowa
- Transformacja Laplace'a Stjeltiesa
- Transformacja Transformacja Laplace'a-Carsona
- Transformacja STFT (short-time Fourier transform)
- Transformacja Chirpleta
- N-Transformacja
- S-Transformacja

Dodatek
Transformacje dyskretne

- Transformacja Binomial
- Dyskretna transformacja Fouriera (DFT)
- Szybka transformacja Fouriera
- Dyskretna transformacja Fouriera cosinusowa
- Zmodyfikowana dyskretna transformacja Fouriera cosinusowa
- Dyskretna transformacja Hartley'a
- Dyskretna transformacja Fouriera sinusowa
- Dyskretna transformacja falkowa
- Szybka transformacja falkowa
- Dyskretna transformacja Hankela transform
- Transformacja IBWDT (Irrational base discrete weighted transform)
- Transformacja Stirlinga
- Dyskretna S-transformacja
- Transformacja Z

Dodatek
Transformacja Laplace'a

Transformacja Laplace'a jest zdefiniowana następująco:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

gdzie $s=\sigma+i\omega$, σ oraz ω są wartościami rzeczywistymi.

Funkcja $f(t)$ musi spełniać następujące warunki:

- $f(t) = 0$ dla $t < 0$ i jest określona dla $t \geq 0$
- $|f(t)| \leq Ae^{\sigma t}$ gdzie $A > 0$ i $\sigma \geq 0$
- $f(t)$ spełnia warunki Dirichleta (ma skończona liczbę punktów nieciągłości – dla każdego z tych punktów istnieje granica lewostronna i prawostronna funkcji, wartość funkcji w tym punkcie przyjmuje się jako średnią arytmetyczna tych granic)

Dodatek
Transformacja Z

Jednostronna transformata Z jest zdefiniowana następująco:

$$F(z) = \text{Ƶ}\{f[n]\} = \sum_{0}^{\infty} f[n] z^{-n}$$

gdzie f[n] jest ciągiem próbek.