KOLOKWIUM 2 - ALGEBRA, 17 stycznia 2013

1. (15 pkt.) Dana jest macierz

$$M = \begin{bmatrix} a & -1 & a & 4 \\ -1 & 3 & 1 & b \\ 3 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) (8 pkt.) W zależności od paramterów $a, b \in \mathbb{R}$ zbadać rząd macierzy M.

   (b) (7 pkt.) Wyznaczyć takie parametry $a, b \in \mathbb{R}$ dla których układ

$$\begin{cases} ax & -y & +az & = 4 \\ -x & +3y & +z & = b \\ 3x & +y & +5z & = 1 \end{cases}.$$

   ma nieskończenie wiele rozwiązań rzeczywistych. Rozwiązać układ dla wyznaczonych parametrów. Czy zbiór rozwiązań tego układu jest przestrzenią liniową? Jeżeli tak, to podać bazę tej przestrzeni.

2. (25 pkt.) Dane jest odwzorowanie liniowe $f : U \to V$, gdzie U, V są pewnymi przestrzeniami liniowymi. Niech $B_U = (u_1, u_2, u_3)$, $B_V = (v_1, v_2, v_3)$ będą bazami odpowiednio przestrzeni U i V. Macierz A jest macierzą odwzorowania f w bazach B_U i B_V:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

   Ponadto niech $B'_V = (2v_1 + v_3, -v_1, -v_2 - v_3)$.

   (a) (4 pkt.) Znaleźć $f(w)$ gdzie $w = 2u_1 - u_3$.

   (b) (9 pkt.) Znaleźć Imf, $Kerf$ oraz podać ich wymiary. Określić, czy f jest epimorfizmem lub monomorfizmem.

   (c) (6 pkt.) Wykazać, że B'_V jest bazą przestrzeni V.

   (d) (6 pkt.) Znaleźć macierz odwzorowania f w bazach B_U i B'_V.

3. (16 pkt.) O protej l wiadomo, że przechodzi przez punkt $P = (0, 0, -2)$ i jest prostopadła do wektorów $\vec{a} = (0, 1, -5)$ i $\vec{b} = (-2, 3, 0)$. O płaszczyźnie π wiadomo, że przechodzi przez punkt $Q(-1, 4, 1)$ i jest prostopadła do płaszczyzn $\pi_1 : x + y + z - 5$ i $\pi_2 : x - y + 2 = 0$.

   (a) (4 pkt.) Znaleźć równanie parametryczne i kierunkowe prostej l.

   (b) (6 pkt.) Znaleźć równanie ogólne i parametryczne płaszczyzny π.

   (c) (6 pkt.) Znaleźć objętość równoległościanu rozpiętego przez wersor prostej l, wektor $\vec{PQ}$ i wersor normalny płaszczyny π.

4. (19 pkt.) Rozważmy przestrzeń wektorową $X = \mathbb{R}_2[x]$.

   (a) (5 pkt.) Sprawdzić, dla jakiego parametru p zbiór $Y = \{w \in X : w(2) = p^2 + p\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni X.

   (b) (5 pkt.) Dla tych p dla których Y jest podprzestrzenią wektorową X wyznaczyć bazę i wymiar przestrzeni Y.

   (c) (9 pkt.) Skonstruować endomorfizm $f : X \to X$, taki, że $Kerf = Y$ i $Imf = \{w \in X : \exists c \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : w(x) = c\}$.