

ALGEBRA - Zestaw 2: Relacje

Zad 1) Dane są relacje $R = (\mathbb{N}, \text{gr}R, \mathbb{N})$, $S = (\mathbb{N}, \text{gr}S, \mathbb{N})$, gdzie:

$$\text{gr}R = \{(1, 1), (1, 2), (3, 2), (3, 4), (3, 7), (2, 9), (5, 3)\},$$

$$\text{gr}S = \{(1, 2), (1, 7), (2, 5), (2, 4), (7, 9), (4, 10)\}.$$

Znajdź dziedziny i przeciwdziedziny tych relacji. Utwórz relacje $R \circ S$, $S \circ R$, S^{-1} , R^{-1} , $S^{-1} \circ R^{-1}$, $(S \circ R)^{-1}$, $S^{-1} \circ R$. Sprawdź, że $S^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ S)^{-1}$.

Zad 2) Udowodnij, że dla relacji R zachodzi implikacja:

$$\text{gr}R^{-1} \subset \text{gr}R \Rightarrow \text{gr}R^{-1} = \text{gr}R.$$

Zad 3) W zbiorze \mathbb{N}^2 dana jest relacja $R = (\mathbb{N}^2, \text{gr}R, \mathbb{N}^2)$ taka, że $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$. Wykaż, że R jest relacją równoważności i znajdź zbiór ilorazowy.

Zad 4) Niech $k \in \mathbb{N}_+$. W zbiorze \mathbb{Z} wprowadzamy relację $m \equiv n \pmod{k} \Leftrightarrow k | (m - n)$. Wykaż, że relacja ta jest równoważnością. Zbiór ilorazowy tej relacji będziemy oznaczać przez \mathbb{Z}/k . Przyjmując $k = 7$ podaj:

- $[2]$, $[5]$, $[-5]$ (klasy równoważności);
- $\mathbb{Z}/7$.

Zad 5) Dane jest odwzorowanie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Niech $S = (\mathbb{R}, \text{gr}S, \mathbb{R})$ będzie relacją taką, że $\text{gr}S = \{(x, y) : f(x) = f(y)\}$.

- Wykaż, że S jest relacją równoważności;
- Niech $a \in \mathbb{R}$. Określ w zależności od a licznosc klasy równoważności $[a]$.

Zad 6) Niech $R = (\mathbb{R}^2, \text{gr}R, \mathbb{R}^2)$, gdzie: $(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \wedge y \leq y'$.

- Wykaż, że R jest relacją porządku. Czy ten porządek jest liniowy?
- Znajdź zbiory minorant i majorant oraz kresy zbiorów $A = \{(1, 2), (3, 1)\}$, $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$;
- Czy zbiory A i B posiadają elementy największe i najmniejsze oraz minimalne i maksymalne?

Zad 7) Niech $S = (\mathbb{R}^2, \text{gr}S, \mathbb{R}^2)$, gdzie:

$$(x_1, y_1)S(x_2, y_2) \Leftrightarrow \ln(1 + x_1^2 + y_1^2) = \ln(1 + x_2^2 + y_2^2).$$

Czy tak określona relacja S jest porządkiem w \mathbb{R}^2 ?

Zad 8) Dany jest uporządkowany zbiór (\mathbb{Q}, \leq) oraz podzbiór $A = \{x : x = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, n, m \in \mathbb{N}_+\}$. Znajdź kresy zbioru A oraz elementy największy i najmniejszy (o ile istnieją). Czy zbiór A stanowi łańcuch?

Zad 9) W zbiorze liczb zespolonych \mathbb{C} określona jest następująca relacja $S : zSz' \Leftrightarrow z - z' \in \mathbb{R}_+$. Sprawdź, że relacja S porządkuje zbiór \mathbb{C} . Dla zbioru $A = \{1 + 2i, 2 + 2i, 3 + 2i, 2 + i\} \subset \mathbb{C}$ znajdź elementy wyróżnione oraz najliczniejszy łańcuch złożony z elementów zbioru A .