ALGEBRA - Zestaw 6: Układy równań

Zad 1) Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = -9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = -9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x + 6y - 3z = 2 \\ x - 2y + z = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ 3x + 4y = 1 \\ 5x - y = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$

f) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 9 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

g) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_6 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 - 2x_6 = 3 \\ -4x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 - 2x_6 = -3 \end{cases}$

Zad 2) Znajdź bazę podprzestrzeni wektorowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozwiązań następującego układu:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 7y - 2z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \end{cases}.$$

Zad 3) Zbadaj w zależności od parametru k ilość rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}.$$

W przypadku, gdy układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, znajdź je stosując:
a) metodę Gaussa;
b) wzory Cramera;

c) metodę macierzy odwrotnej.

Zad 4) W zależności od parametrów a i b rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x & -2y & +3z & = & b \\ ax & +5y & -z & = & 1 \\ -x & +3y & +2z & = & 3 \end{cases}.$$

Zad 5) Rozważmy następujący układ równań z parametrami $k, a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$(*) \begin{cases} kx & +y & +z & = & a \\ x & +ky & +z & = & b \\ x & +y & +kz & = & c \end{cases}$$

a) Znajdź zbiór K tych k, dla których układ $(*)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie i rozwiąż ten układ dla tych k;
b) Dla każdego $k \notin K$ podaj warunek konieczny i wystarczający, który muszą spełniać a, b, c, aby układ $(*)$ miał co najmniej jedno rozwiązanie;
c) Rozwiąż układ $(*)$ dla $k = 1, a = b = c = 3$, oraz dla $k = -2, a = b = 1, c = -2$.

Zad 6)
a) Znajdź w zależności od parametrów $k, l \in \mathbb{R}$ rząd macierzy:

$$M(k,l) = \begin{bmatrix} k & l & 1 \\ 1 & kl & 1 \\ 1 & l & k \end{bmatrix};$$

b) Przedyskutuj ze względu na parametry ilość rozwiązań układu:

$$\begin{cases} kx & +ly & +z & = & a \\ x & +kly & +z & = & b \\ x & +ly & +kz & = & c \end{cases}.$$