Zestaw 1 - jednokrokowy model dwumianowy

W poniższych zadaniach rozważamy jednokrokowy model dwumianowy ($\mathbb{T} = \{0, T\}$). Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie

$$\begin{aligned} \Omega &= \{U, D\}, \text{ gdzie } -1 < D < U, \\ \mathcal{F} &= \{\emptyset, \{U\}, \{D\}, \Omega\} \\ \mathbb{P}(U) &= p, \ \mathbb{P}(D) = 1 - p. \end{aligned}$$

Cena waloru ryzykownego w chwili T

$$S(T) = \begin{cases} S^U = S(0)(1+U), & \text{z prawdopodobieństwem } p, \\ S^D = S(0)(1+D), & \text{z prawdopodobieństwem } 1-p. \end{cases},$$

gdzie $S(0) \in \mathbb{R}_+$.
Dla dowolnego instrumentu pochodnego $H(T) = h(S(T))$ definiujemy zwrot na tym instrumencie jako

$$K_H = \frac{H(T) - H(0)}{H(0)}.$$

Stopa wolna od ryzyka R (brak arbitrażu $\Leftrightarrow D < R < U$).
Prawdopodobieństwo martyngałowe $\mathbb{Q}$.

1. Udowodnić, że cena opcji europejskiej rośnie jeśli rośnie U. Pokazać, że maleje jeśli maleje D (Wskazówka: do wyceny opcji wykorzystać portfel replikujący).

2. Obliczyć wariancję zmiennej losowej K_S i pokazać, że jest rosnącą funkcją różnicy $U - D$.

3. Obliczyć μ_{K_S}, μ_{K_H}, $\sigma^2_{K_S}$, $\sigma^2_{K_H}$, oraz $Cov(K_S, K_H)$, gdzie H jest opcją europejską[1].

4. Niech $\beta_H = \frac{Cov(K_s, K_H)}{\sigma^2_{K_S}}$. Udowodnić, że $\sigma_{K_H} = \beta_H \sigma_{K_S}$ oraz, że

$$\mu_{K_H} - R = \beta_H(\mu_{K_S} - R).$$

5. Pokazać, że

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(K_H) - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(K_H) = (p - q)\frac{H^U - H^D}{H(0)}.$$

6. Zakładając, że $\mu_{K_H} \leqslant R$ pokazać, że

$$\mu_{K_H} - R = (p - q)\frac{\sigma_{K_H}}{\sqrt{p(1-p)}}$$

[1] Dla dowolnej zmiennej losowej Z przyjmujemy oznaczenia $\mu_Z = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z)$ oraz $\sigma^2_Z = Var(Z)$