Zestaw 2 - prawdopodobieństwo martyngałowe w modelu jednokrokowym (jedna akcja)

1. Dany jest dowolny instrument pochodny H, gdzie $H(1) = H^U$ z prawdopodobieństwem p i $H(1) = H^D$ z prawdopodobieństwem $1-p$. Wykazać, że cena instrumentu H w chwili 0 jest równa
$$H(0) = \frac{1}{1+r}\left(qH^U + (1-q)H^D\right),$$
gdzie $q = \frac{R-D}{U-D}$.

2. Wykazać, że dla dowolnego instrumentu pochodnego H zachodzi $\mathbb{E}_Q(K_H) = R$.

3. Rozważając prawdopodobieństwa martyngałowe pokazać, że dla europejskiej opcji call C mamy $\beta_C \geqslant 0$.

4. Rozważmy europejską opcję call o cenie wykonania 110, w następującym modelu dwumianowym:
$$A(0) = 100,\ A(1) = 105,\ S(0) = 100,\ S^U = 130,\ S^D = 90.$$
Wyznaczyć cenę opcji w tym modelu metodą replikacji oraz za pomocą prawdopodobieństw martyngałowych.

5. Rozważmy następujący model dwumianowy:
$$A(0) = 10,\ A(1) = 12,\ S(0) = 75,\ S^U = 120,\ S^D = 72.$$
Skonstruować strategię arbitrażową w celu pokazania, że cena opcji równa 6 nie jest odpowiednia dla opcji europejskiej z ceną wykonania 96.

6. Niech
$$S(0) = 100,\ U = 20\%,\ M = 10\%,\ D = -15\%,\ R = 5\%,\ H^U = 25,\ H^M = 5.$$
Znaleźć takie H^D, aby istniał dokładnie jednen portfel replikujący. Dla dowolnych H^U, H^M, H^D znaleźć taką relację między tymi trzema wartościami, aby istniał dokładnie jeden portfle replikujący. Rozważyć ten problem również dla dowolnych $S(0), U, M, D, R$.

7. Dany jest model trójmianowy:
$$A(0) = 1,\ A(1) = 1,\ S(0) = 220,\ S^U = 230,\ S^M = 210,\ S^D = 190.$$
Pokazać, że ogólna postać prawdopodobieństw martyngałowych jest następująca
$$(\lambda, \frac{3}{2} - 2\lambda, \lambda - \frac{1}{2}),$$
gdzie $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$.