Zestaw 3 - prawdopodobieństwo martyngałowe w modelu jednokrokowym (kilka akcji)

1. Znaleźć zmienną losową G pełniącą rolę *gęstości* Q względem P, tzn. spełniającą $q = G^U p$, $1 - q = G^D(1-p)$. Udowodnić, że $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(G) = 1$, przez co ciąg $G(0) = 1, G(T) = G$ jest martyngałem względem miary $\mathbb{P}$.

2. Dany jest model jednokrokowy z jedną akcją. Pokazać, że $\mathbb{Q}$ jest miarą martyngałową w tym modelu, wtedy i tylko wtedy gdy
$$\mathbb{E}_Q(K_S) = R.$$

3. Zakładając, że zwroty na giełdzie wynoszą $5\%, 8\%, -20\%$ dla pierwszej akcji oraz $-5\%, 10\%, a\%$ dla drugiej akcji, znaleźć takie a, aby istniało prawdpodobieństwo martyngałowe dla $R = 5\%$.

4. Znaleźć cenę opcji koszykowej (*basket option*) o wypłacie
$$H(T) = \max\{S_1(T) + S_2(T) - X, 0\},$$
gdzie $S_1(0) = 100$, $S_2(0) = 50$, $X = 150$, zwroty dla akcji pierwszej wynoszą $20\%, 5\%, -20\%$ natomiast dla akcji drugiej $-10\%, 8\%, 2\%$. Stopa wolna od ryzyka $R = 5\%$. Cenę znajdź metodą replikacji oraz za pomocą prawdopodobieństwa martyngałowego.

5. Znaleźć ogólną postać prawdopodobieństw martyngałowych w modelu
$$S(0) = 80,\ A(0) = 10,\ A(1) = 11,\ S^U = 110,\ S^M = 90,\ S^D = 75.$$
Następnie pokazać, że dowolny osiągalny instrument pochodny H w tym modelu musi spełniać zależność
$$3G^U - 7H^M + 4H^D = 0.$$
Wyrazić uczciwą cenę $H(0)$ w terminach H^M, H^D.

6. Rozszerzyć model z Zadania 7 (Zestaw 2.) dodając kolejną akcję S'
$$S'(0) = 85,\ S'^U = 80,\ S'^M = 70,\ S'^D = 90.$$
Pokazać, że w tym przypadku nie istnieje miara martyngałowa. Następnie skonstruować strategię aribtrażową.