Zestaw 4 - parytet put-call

1. Dany jest dowolny modelu jednokrokowy, w którym nie występuje arbitraż. Stopa wolna od ryzyka wynosi R. Pokazać, że spełniony jest *parytet put-call*, to znaczy równość
$$C(0) - P(0) = S(0) - \frac{X}{1+R},$$
gdzie C i P to odpowiednio opcje call i put z cenami realizacji równymi X.

2. Pokazać, że zasada braku arbitrażu implikuje prawo jednej ceny: gdy dane są dwa instrumenty S_1 i S_2, których wartość w chwili 1 jest taka sama (to znaczy $S_1^\omega(1) = S_2^\omega(1)$ dla wszystkich $\omega \in \Omega$), to ich ceny w chwili 0 również muszą być sobie równe.

3. Pokazać, że prawo jednej ceny implikuje parytet put-call.

4. W pewnym moedelu jednokrokowym (niekoniecznie dwumianowym!) dane są trzy opcje call: C_1, C_2, C_3, z cenami wykonania odpowiednio X_1, X_2, X_3. Wiadomo, że $X_3 - X_2 = X_2 - X_1$. Pokazać, że
$$C_2(0) \leqslant \frac{C_1(0) + C_3(0)}{2}.$$
Następnie wykazać analogiczną nierówność dla opcji put.

5. Dany jest model jednokrokowy, oraz opcje put P i call C o cenie wykonania $X = 105$. Wiadomo, że $C(0) = 10$, $P(0) = 7$, $S(0) = 104$, oraz $R = 5\%$. Czy model ten dopuszcza arbitraż? Jeżeli tak, to wskaż strategię arbitażową.

6. Wykazać, że prawdziwe są nierówności
$$\max(S(0) - \frac{K}{1+R}, 0) \leqslant C(0) \leqslant S(0)$$
oraz
$$\max(\frac{K}{1+R} - S(0)) \leqslant P(0) \leqslant \frac{K}{1+R},$$
gdzie C i P są odpowiednio opcjami call i put o cenie wykonania K, a R stopą wolną od ryzyka.

7. Wyprowadzić parytet put-call dla europejskich opcji bianrnych typu *Cash-or-Nothing*.

8. Na rynku dana jest akcja nie wypłacająca dywidendy, przy czym $S(0) = 2$. Rozważmy dwie opcje typu europejskiego na tę akcję, obie o tym samym czasie wykonania ($T = 1$ rok). Opcje te mają następujące wypłaty:
$$I : H_I(T) = (5S(T) - 10)_+ \tag{1}$$
$$II : H_{II}(T) = (10 - 5S(T))_+. \tag{2}$$
Wiadomo, że cena opcji H_I w chwili 0 wynosi $H_I(0) = 2$. Wiadomo, że stopa wolna od ryzyka wynosi $r = 5\%$. Znajdź uczciwą cenę opcji H_{II}.