

**Zestaw 8 - warunkowa wartość oczekiwana**

1. Niech  $X$  będzie zmienną losową określoną na przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Niech  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ . Wykazać, że

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X).$$

2. Wykonujemy dwukrotnie rzut kostką. Niech  $X$  oznacza sumę oczek z obu rzutów, a  $Y$  wynik pierwszego rzutu. Obliczyć  $\mathbb{E}(X|Y)$ .
3. Rozważmy model cen akcji z dynamiką:

$\omega$	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$	$S(3)$	$P(\{\omega\})$
$\omega_1$	100	121	130	140	$\frac{1}{8}$
$\omega_2$	100	121	130	110	$\frac{1}{8}$
$\omega_3$	100	121	100	110	$\frac{1}{8}$
$\omega_4$	100	121	100	90	$\frac{1}{8}$
$\omega_5$	100	90	105	90	$\frac{1}{8}$
$\omega_6$	100	90	105	95	$\frac{1}{8}$
$\omega_7$	100	90	85	95	$\frac{1}{8}$
$\omega_8$	100	90	85	75	$\frac{1}{8}$

Wyznaczyć  $\mathbb{E}(S(3)|\mathcal{P}_2)$ , gdzie  $\mathcal{P}_2$  - podział  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_8\}$  generowany przez  $(S(0), S(1), S(2))$ . Obliczyć też  $\mathbb{E}(S(3)|S(1) = 121)$ .

4. Rozważmy model cen akcji z dynamiką:

$\omega$	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$	$Q(\{\omega\})$
$\omega_1$	80	120	180	$\frac{2}{15}$
$\omega_2$	80	120	80	$\frac{3}{15}$
$\omega_3$	80	60	72	$\frac{4}{9}$
$\omega_4$	80	60	36	$\frac{2}{9}$

Sprawdzić czy proces cen akcji  $(S(n))_{n=0,1,2}$  jest martynałem względem filtracji generowanej przez ciąg podziałów  $(\mathcal{P}_n)_{n=0,1,2}$  przestrzeni probabilistycznej  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ?

5. Rozważmy model cen akcji z dynamiką:

$\omega$	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$	$Q(\{\omega\})$
$\omega_1$	100	115	126.5	$q_1$
$\omega_2$	100	115	103.5	$q_2$
$\omega_3$	100	15	120	$q_3$
$\omega_4$	100	15	95	$q_4$

Stopa wolna od ryzyka wynosi 5%. Czy istnieją wartości prawdopodobieństw  $q_1, q_2, q_3, q_4$  takie, aby zdyskontowany proces cen akcji  $(\tilde{S}(n))_{n=0,1,2}$  był martynałem względem filtracji generowanej przez ciąg podziałów  $(\mathcal{P}_n)_{n=0,1,2}$  przestrzeni probabilistycznej  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ?