Kolokwium 1 - GRY KOMBINATORYCZNE, 24 kwietnia 2014

1. Rozważmy grę Fibonacci Nim. Na stole jest $4F_n$ bierek. Znaleźć ruch wygrywający dla dowolnego n naturalnego (o ile taki ruch istnieje).

2. Znaleźć N i P pozycje w grze Empty and Divide (z dwoma stołami), **przy założeniu, że gracz, który wykonuje ostatni ruch przegrywa.**[1]

3. Na stole leżą 3 talie kart: pierwsza z nich zawiera komplet 52 kart, a pozostałe dwie są wybrakowane: w drugiej talii brakuje asa pik i króla pik oraz dwóch trójek (kier i pik), natomiast w trzeciej talii brakuje damy i króla karo oraz dziesiątki, dziewiątki i ósemki pik. Ruch w grze polega na zadeklarowaniu kolorów (co najwyżej dwóch) i wzięciu dowolnej liczby kart ze stołu - wyłącznie w zadeklarowanym kolorze/kolorach. W każdym ruchu należy wziąć przynajmniej jedną kartę. Wygrywa gracz, który wziął ostatnią kartę. Czy gracz rozpoczynający tę grę ma szansę ją wygrać? Jeżeli tak, to wskazać ruch wygrywający.

4. Na stole leży stos n żetonów. Pierwszy gracz może usunąć dowolną liczbę żetonów, przynajmniej jeden żeton, ale nie cały stos. Następnie gracze naprzemiennie wykonują swoje ruchy, przy czym każdy gracz może usunąć

   - co najwyżej tyle żetonów, ile przeciwnik wziął w poprzednim ruchu, gdy została wzięta parzysta liczba żetonów,
   - co najwyżej o jednej więcej żeton, niż przeciwnik wziął w poprzednim ruchu, gdy została wzięta nieparzysta liczba żetonów.

   Wygrywa gracz wykonujący ostatni ruch. Wskazać ruch wygrywający (o ile istnieje) dla pierwszego gracza jeżeli $n = 70$. Dla jakich wartości n drugi gracz ma szansę wygrać?

5. Niech ciąg $\{H_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ będzie dany wzorem $H_0 = 1$,

   $$H_{k+1} = H_k + \min_{i \leqslant k}\{H_i : f(H_i) \geqslant H_k\}, \quad k \geqslant 0.$$

   Pokazać, że jeżeli $f(H_{j_i}) < H_{j_{i+1}}$ dla $1 \leqslant i < p$ ($p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$), to

   $$H_{j_1} + H_{j_2} + \cdots + H_{j_p} < H_{j_p+1}.$$

6. Zapisać oraz udowodnić twierdzenie Wythoffa.

[1] rozwiązanie dla wersji LPTMW jest oceniane na 0 pkt.!