Ciąg Fibonacciego to ciąg liczb określony rekurencyjnie w sposób następujący:

$$\begin{array}{rcl} F_0 & = & 0 \\ F_1 & = & 1 \\ F_n & = & F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{dla} \quad n \geq 2 \end{array}$$

Początkowe wartości tego ciągu to:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...$$

Funkcja tworząca dla ciągu (a_n) jest zdefiniowana przez

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Przykłady funkcji tworzących:

1. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$,
2. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}$,
3. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^n}$

1. Wykazać następujące własności ciągu Fibonacciego:
   (a) $F_1 + F_2 + ... + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - 1$;
   (b) $F_1 + F_3 + F_5 + ... + F_{2n-1} = F_{2n}$;
   (c) $F_2 + F_4 + F_6 + ... + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$;
   (d) $F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + ... + (-1)^{n+1} F_n = (-1)^{n+1} F_{n-1} + 1$;
   (e) $F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2 = F_n F_{n+1}$;
   (f) $F_{n+m} = F_{n-1} F_m + F_n F_{m+1}$;
   (g) $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$;
   (h) $2F_n \geq F_{n+1}$.
2. Wykazać, że
$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$
3. Wyznaczyć jawny wzór na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego korzystając z metody funkcji tworzących.
4. Wyznaczyć funkcję tworzącą dla ciągu:
   (a) $(a_n) = (-1, 0, 1, 0, 3, 0, 5, ...)$,
   (b) $a_n = (2n-1)3^n - 2^n + 3$,
   (c) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} - 2n + 3$ dla $n \geq 2$.

5. Za pomocą funkcji tworzących znajdź wzór jawny na n-ty wyraz ciągu określonego rekurencyjnie w następujący sposób:

   (a) $a_0 = a_1 = 3$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ dla $n \geq 2$,

   (b) $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$ dla $n \geq 2$,

   (c) $a_0 = 0$, $a_n = 6n + a_{n-1}$ dla $n \geq 1$.

6. Na ile sposobów można podzielić zbiór $\{1, 2, .., n\}$ na dwa niepuste podzbiory?

Gra The Take-Away. Na stole leży stos 21 żetonów. Jest dwóch graczy. Gracza rozpoczynającego oznaczamy G_I, drugiego G_{II}. Gracze na przemian wykonują swoje ruchy. Ruch polega na usunięciu jednego, dwóch, lub trzech żetonów ze stosu. Co najmniej jeden żeton musi być usunięty, ale nie więcej niż trzy. Wygrywa ten z graczy, który usunie ostatni żeton.

Zadania

1. Rozważmy wersję odwrotną gry The Take-Away, w której przegrywa gracz wykonujący ostatni ruch. Celem jest, aby zmusić przeciwnika do wzięcia ostatniej bierki. Przeanalizować tę grę. Jakie są pozycje docelowe (P-pozycje)?

2. Uogólnienie gry The Take-Away.

   (a) Załóżmy, że w trakcie gry ze stosu zawierającego duża ilość żetonów, możemy usunąć dowolną liczbę od 1 do 6 żetonów w każdym ruchu. Jaka jest strategia wygrywająca? Jakie są P-pozycje?

   (b) Jaki jest ruch wygrywający (o ile w ogóle istnieje), w sytuacji, gdy na początku mamy na stole stos 31 żetonów?

3. Znajdź zbiór P-pozycji dla gier „Zabieranie" (ang. **Subtraction Game**) ze zbiorem S

   (a) $S = \{1, 3, 5, 7\}$.

   (b) $S = \{1, 3, 6\}$.

   (c) $S = \{2^n : n = 0, 1, 2, ...\}$.

   (d) Kto wygra każdą z tych gier, jeśli zaczniemy grać od 100 żetonów, pierwszy czy drugi gracz?

4. Gra „Opróżnić i podzielić" (ang. **Empty and Divide**). Mamy dwa pudełka. Początkowo w pierwszym pudełku umieszczono m żetonów, a w drugim n żetonów. Takie rozmieszczenie żetonów oznaczmy jako (m, n), gdzie $m > 0$ i $n > 0$. Dwóch graczy na przemian wykonuje swoje ruchy. Ruch polega na opróżnieniu jednego z pudełek, a następnie rozdzieleniu zawartości drugiego pudełka pomiędzy te dwa pudełka (przynajmniej po jednym żetonie do każdego pudełka). Istnieje jedyna pozycja końcowa, tj. $(1, 1)$. Przegrywa ten gracz, który nie może wykonać ruchu. Znajdź wszystkie P-pozycje.

5. **Chomp!** Mamy prostokątną tabliczkę czekolady złożoną z nm pól (czekolada ma boki długości n i m, gdzie n, $m \geq 2$). Jest dwóch graczy. Gracze na przemian wykonują swoje ruchy. Jeden ruch gracza polega na wybraniu pewnego pola (x, y), jeszcze nie odłamanego, gdzie $1 \leq x \leq n$, $1 \leq y \leq m$, odłamaniu od czekolady wszystkich tych jeszcze nie odłamanych pól (a, b), dla których $a \geq x$ i $b \geq y$ i zjedzieniu odłamanej części. Przegrywa ten, kto zje ostatni kawałek.

   Rozważmy tabliczkę czekolady 8×3. Załóżmy, że gracz G_I wybrał pole $(6, 2)$ i zjadł 6 kawałków. Następnie gracz G_{II} wybrał pole $(2, 3)$ i zjadł 4 kawałki.

(a) Pokaż, że ta pozycja jest N-pozycją, poprzez znalezienie ruchu wygrywającego dla pierwszego gracza.

(b) Wiadomo jest, że pierwszy gracz może wygrać wszystkie „prostokątne" pozycje startowe. Dowód polega na pokazaniu, że istnieje zwycięska strategia dla pierwszego gracza, ale nie daje odpowiedzi, jak znaleźć pierwszy ruch. Spróbuj znaleźć dowód. Wskazówka: Czy usunięcie prawego górnego rogu jest zwycięskim ruchem?

6. Dynamiczna gra „Zabieranie". Można powiększyć klasę gier „Zabieranie" pozwalając, aby zbiór S zależał od ostatniego ruchu przeciwnika. Poniżej dwa przykłady.

   (a) Na stole leży stos n żetonów. Pierwszy gracz może usunąć dowolną liczbę żetonów, przynajmniej jeden żeton, ale nie cały stos. Następnie gracze naprzemiennie wykonują swoje ruchy, przy czym każdy gracz nie może usunąć więcej żetonów niż jego przeciwnik wziął w poprzednim ruchu. Jaki jest optymalny ruch dla pierwszego gracza, jeśli $n = 44$? Dla jakich n drugi gracz ma szansę wygrać?

   (b) **Fibonacci Nim**. Te same zasady, jak w (a), z wyjątkiem że gracz może usunąć co najwyżej dwukrotną ilość żetonów jaką jego przeciwnik zabrał w poprzednim ruchu. Jaki jest optymalny ruch dla pierwszego gracza, jeśli $n = 43$? Dla jakich n drugi gracz ma szansę wygrać?

7. Gra **SOS**. Plansza do gry składa się z n ustawionych w rzędzie kwadratów, które są początkowo puste. Gracze na zmianę wybierają puste pole, a następnie wpisują w nim S lub O. Gracz, który jako pierwszy uzupełni SOS w kolejnych kwadratach, wygrywa. Jeśli cała plansza zostanie wypełniona bez SOS występującego w dowolnym miejscu, jest remis.

   (a) Załóżmy, że $n = 4$, a pierwszy gracz kładzie S w pierwszym polu. Pokazać, że drugi gracz ma szansę wygrać.

   (b) Pokazać, że jeśli $n = 7$, to pierwszy gracz ma szansę wygrać.

   (c) Pokazać, że jeśli $n = 2000$, to drugi gracz ma szansę wygrać.

   (d) Rozstrzygnąć, czy któryś z graczy może wygrać, gdy $n = 14$. Jeśli tak, to który?

8. Gra **31**. Z talii kart z każdego koloru bierzemy asa, 2, 3, 4, 5 i 6. Wszystkie 24 karty leżą na stole i są odkryte. Gracze na przemian obracają karty, a suma zakrytych kart jest obliczana wraz z postępem gry. As liczony jest jako 1. Gracz, który jako pierwszy przekroczy sumę 31, przegrywa. Wydaje się, że ta gra jest równoznaczna z grą z zadania 2(b). Ale jest haczyk. Żadna liczba nie może być wybrana więcej niż cztery razy.

   (a) Pierwszy gracz stosuje strategię z zadania 2(b). Co się stanie jeśli przeciwnik będzie wybierał tylko 4?

   (b) Niemniej, pierwszy gracz może wygrać przy optymalnej grze. W jaki sposób?