## Zestaw 3 - Rozkład Zeckendorfa

Niech $Z(n)$ będzie liczbą składników w rozkładzie Zeckendorfa liczby $n$ (np. $Z(1) = 1$, $Z(4) = 2$).

1. Pokazać, że $Z(2F_n) = 2$ dla dowolnego $n \geq 1$.

2. Rozważmy grę Fibonacci Nim. Na stole jest $2F_n$ bierek, gdzie $n \geq 2$. Pokazać, że wzięcie $F_{n-2}$ bierek przez pierwszego gracza jest ruchem wygrywającym.

3. Znaleźć $Z(F_n - 1)$ dla $n \geq 0$.

4. Rozważmy grę Fibonacci Nim. Na stole jest $F_n - 1$ bierek, gdzie $n \geq 1$. Znaleźć ruch wygrywający.

5. Pokazać, że $Z(F_n^2) = \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor$ dla $n \geq 1$ (wskazówka: wykorzystać tożsamość $F_{n+m} = F_{n-2}F_{m-1} + F_{n-1}F_m$).

6. Rozważmy grę Fibonacci Nim. Na stole jest $F_n^2$ bierek, gdzie $n \geq 1$. Pokazać, że wzięcie jednej bierki przez pierwszego gracza jest ruchem wygrywającym.

7. Wykazać, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ takich, że $m \geq 2$, $n \geq 1$ liczba $\frac{F_{mn-2}}{F_{m-2}}$ jest całkowita.

8. Dualnym rozkładem Zeckendorfa liczby naturalnej $n$ nazwiemy przedstawienie jej w postaci
$$n = \sum_{k=0}^{m} \epsilon_i F_i,$$
gdzie $\epsilon_i \in \{0, 1\}$, $\epsilon_m = 1$, i dla dowolnego $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ zachodzi $(\epsilon_i, \epsilon_{i+1}) \neq (0, 0)$. Wykazać, że dowolna liczba naturalna posiada jednoznacznie wyznaczony dualny rozkład Zeckendorfa.

9. Zdefiniujmy funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ w następujący sposób. Niech $n = \sum_{k=1}^{m} F_{i_k}$ będzie rozkładem Zeckendorfa liczby naturalnej $n$. Wówczas:
$$f(n) = \sum_{k=1}^{m} F_{i_k+1}.$$
Wykazać, że $f(n)$ jest rzędu $\Theta(n)$.