Zestaw 1 - szeregi liczbowe

1. Znaleźć sumę szeregu, lub wykazać, że jest on rozbieżny
   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$,
   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$,
   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$,
   (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+3)}$,
   (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$,
   (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$,
   (g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$,
   (h) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$,
   (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^n$.
2. Stosując warunek konieczny zbieżności szergu pokazać, że następujące szeregi są rozbieżne
   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(-1)^n n}$,
   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(\sin\frac{1}{n})$,
   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$,
3. Stosując kryterium porównawcze zbadać zbieżność następujących szeregów
   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n\sqrt{n+1}}}$,
   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,
   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}(\sqrt{n^2+n\sqrt{n}}-\sqrt{n^2-n\sqrt{n}})$.
4. Stosując kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność następujących szeregów
   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^n}{n!}$,
   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,
   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$,
   (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n \ln(n!)}$,
5. Stosując kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność następujących szeregów
   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\arctan(n^2+1))^n$,
   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(1+\frac{1}{n})^n}$,
   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$,

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

6. Stosując kryterium całkowe zbadać zbieżność następujących szeregów

   (a) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$,

   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$,

   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$.

7. Stosując kryterium Leibniza zbadać zbieżność następujących szeregów naprzemiennych

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{sin^2 n}{n}$,

   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$,

   (c) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}$,

   (d) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\ln^2 n}\cos\pi n^2$.

8. Zbadać zbieżność następujących szeregów, a w przypadkach gdy nie wszystkie wyrazy szeregu są dodatnie rozstrzygnij, czy szereg jest zbieżny warunkowo czy bezwzględnie:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+3}$,

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$,

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$,

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n^2}$,

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\tan^2\frac{1}{\sqrt{n}}$,

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}$,

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^{2n}}$,

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^{2n}+2^n}$,

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!+2^n}{n^3-n}$,

   (j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{3n}+(n!)^2}{(3n)!+n!}$,

   (k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 3^n}{3^n}$,

   (l) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$,

   (m) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\arctan n}{\pi}\right)^n$,

   (n) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^n$,

   (o) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2}$,

   (p) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$,

   (q) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$,

   (r) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$,

(s) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\frac{1}{n\sqrt{n}}$,

(t) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$,

(u) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n})$,

(v) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin\frac{1}{n}\tan\frac{1}{n})$,

(w) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$,

(x) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$,

(y) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{n}}{\tan\frac{1}{\sqrt{n}}}$.