Zestaw 2 - ciągi i szeregi funkcyjne

1. Zbadać zbieżność punktową (wyznaczyć obszary zbieżności i funkcje graniczne) podanych niżej ciągów funkcyjnych. Czy zbieżność tych ciągów jest jednostajna na ich obszarach zbieżności?

   (a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n$,

   (b) $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$,

   (c) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2}$,

   (d) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$,

   (e) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$,

   (f) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$,

   (g) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$,

   (h) $f_n : [2, +\infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$,

   (i) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \arctan nx$,

   (j)
   $$f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} -nx + 1, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0, & x > \frac{1}{n} \end{cases}.$$

2. Korzystając z Kryterium Weierstrassa zbadać czy następujące szeregi funkcyjne są zbieżne jednostajnie w zbiorze X:

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n^2},\ X = \mathbb{R}$,

   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(1+n^2x^2)},\ X = \mathbb{R}$,

   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx}{1+n^4x^4},\ X = [\alpha, +\infty),\ \alpha > 0$,

   (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2},\ X = [\alpha, +\infty),\ \alpha > 0$,

   (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n},\ X = [\alpha, +\infty),\ \alpha > 1$,

   (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{1+nx}},\ X = [0, +\infty)$,

   (g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n!},\ X = \mathbb{R}$,

   (h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}n!}{n^{2n}} \cos 2nx,\ X = \mathbb{R}$,

   (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx^2}{\sqrt[3]{n^4+x^4}},\ X = \mathbb{R}$.

3. Wyznaczyć promień i zbiór zbieżności dla następujących szeregów potęgowych

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} n!(x-1)^n$,

   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}(x+2)^{n+1}$,

   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n (x - \frac{1}{2})^n$.

4. Wyznaczyć promień i przedział zbieżności dla następujących szeregów potęgowych, zbadaj ich zbieżność na krańcach przedziału zbieżności, a następnie obliczyć jego sumę w każdym punkcie wyznaczonego zbioru zbieżności

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} 10^n x^n$,

   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n10^{n-1}}$,

   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)(x-2)^n$,

   (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+3)4^n}$,

   (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+3}{5^n} x^{2n}$,

   (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n x^{3n}}{n+1}$,

   (g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)(x+1)^n}{6^n}$,

   (h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4^n(n+1)(n+2)}$,

   (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n(x-\frac{1}{2})^n}{n+1}$,

   (j) $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$,

   (k) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$,

   (l) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(2n+1)}{6^n} x^{2n}$,

   (m) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$,

   (n) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{}{2n+1} x^n$,

5. Pokazać, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest równość

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} x^{2n+1}.$$

6. Rozważmy funkcję $f(x) = \arctan x$.

   (a) Rozwinąć funkcję f w szereg Taylora o środku w punkcie 0.

   (b) Określić obszar zbieżności otrzymanego szeregu.

   (c) Korzystając z otrzymanego rozwinięcia obliczyć $f^{(50)}(0)$ oraz $f^{(101)}(0)$.

7. Bez wyliczania pochodnych rozwinąć dane funkcje w szereg Taylora o środku w punkcie x_0 (określić obszary zbieżności)

   (a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$,

   (b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 2$,

   (c) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $x_0 = 0$,

   (d) $f(x) = \ln|x^2 + 3x + 2|$, $x_0 = 0$,

   (e) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 3$,

   (f) $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+7}$, $x_0 = -2$,

(g) $f(x) = e^x,\ x_0 = 2,$

(h) $f(x) = e^{2x+1},\ x_0 = 0,$

(i) $f(x) = x^2 e^x,\ x_0 = 0,$

(j) $f(x) = x \arctan x^2,\ x_0 = 0,$

(k) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{2},$

(l) $f(x) = \sin 3x,\ x_0 = 0.$

8. (*) Funkcja f jest określona na $\mathbb{R}$ wzorem $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4+x^4}$. Pokazać, że funkcja f jest ciągła na $\mathbb{R}$ i obliczyć $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

9. Funkcja f jest określona na $\mathbb{R}$ wzorem $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n3^{n-1}x^{n-1}$. Pokazać, że funkcja f jest ciągła na $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ i obliczyć $\int_0^{\frac{1}{8}} f(x)dx$.

10. Korzystając z rozwinięcia funkcji $\arctan x$ w szereg potęgowy obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$.

11. Korzystając z rozwinięcia funkcji $\ln(1+x)$ w szereg potęgowy oraz z Twierdzenia Abela obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.