KOLOKWIUM 2, Fizyka Medyczna
06.06.2014

1. (10 pkt.) Obliczyć masę płata powierzchniowego S wiedząc, że S jest częścią powierzchni $z = x^2 + y^2$, leżacej w pierwszej ósemce przestrzni poniżej płaszczyny $z = \frac{3}{4}$. Gęstość w każdym punkcie powierzchni S dana jest wzorem $\rho(x, y, z) = xyz$. (wynik podać w postaci nieskracalnego ułamka!)

Rozwiązanie:

$$M = \iint_S xyz dS = \iint_D xy(x^2 + y^2) \|N\| \, dxdy = \iint_D xy(x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy, \tag{1}$$

gdzie D jest rzutem powierzchni S na płaszczyznę XOY (tj. $\frac{1}{4}$ koła, leżącą w pierwszej ćwiartce), natomiast

$$N = \left[-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right] = [-2x, -2y, 1] \, .$$

Po przejściu w całce (1) na współrzędne biegunowe dostajemy

$$\begin{aligned}
\iint_D xy(x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (r\cos\phi)\,(r\sin\phi)\, r^2\sqrt{1 + 4r^2} r dr d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi\cos\phi d\phi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^5\sqrt{1 + 4r^2} dr \\
&= \frac{1}{2}\frac{53}{420} = \frac{53}{840}.
\end{aligned}$$

Uwagi do Państwa rozwiązań:

Kolejność przejść w (1) jest następująca: najpierw całkę **powierzchniową** zamieniamy na całkę **podwójną,** czyli

$$\iint_S xyz dS = \iint_D xyz(x, y) \|N\| \, dxdy = \iint_D xy(x^2 + y^2) \|N\| \, dxdy.$$

Tutaj dwie uwagi: całka podwójna jest po D (czyli obszarze płaskim!), a nie po S (czyli powierzchni). Wiele osób w ogóle nie napisało **po czym** całkujemy! Poza tym pisząc, że całkują Państwo po D wypada zaznaczyć ten obszar na rysunku (ew. napisać, że jest to rzut powierzchni S na płaszczyznę XOY).

Dopiero po zamianie całki powierzchniowej na podwójną zostaje wykonana zamiana współrzędnych **w całce podwójnej** (z kartezjańskich na biegunowe). Zwracam uwagę na granice całkowania. Ponieważ D leży w pierwszej ćwiartce, więc $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Ponadto $r \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, gdyż powierzchnia S jest zadana równością

$$z = x^2 + y^2 = r^2,$$

oraz $z \leqslant \frac{3}{4}$.

Całkę

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^5\sqrt{1+4r^2}dr$$

należy obliczyć przed podstawienie $t = 1 + 4r^2$.

2. (8 pkt.) Obliczyć następującą całkę

$$\iint_S x(y^2+1)dydz + y(x^2+1)dxdz - z(x^2+y^2)dxdy$$

gdzie S jest wewnętrzną stroną brzegu bryły zadanej przez nierówności $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$, $y \geqslant 0$.

Rozwiązanie:

S jest powierzchnią zamkniętą, więc najprostszą opcją jest skorzystanie z tw. Gaussa-Ostrogradskiego:

$$\begin{aligned}
\iint_S x(y^2+1)dydz + y(x^2+1)dxdz - z(x^2+y^2)dxdy &= -\iiint_V divF dxdydz && \text{(2a)}\\
&= -\iiint_V 2dxdydz \\
&= -2\iiint_V dxdydz && \text{(2b)}\\
&= -2\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi 2^3 \\
&= -\frac{32}{3}\pi.
\end{aligned}$$

W powyższych równościach V jest półkulą o promieniu 2 leżącą w półprzestrzeni $y \geqslant 0$.

Uwagi do Państwa rozwiązań:

Kilka osób próbowało liczyć całkę powierzchniową wprost, nie korzystając z tw. G-O. Nikt a tych osób nie policzył tej całki dobrze, natomiast solidenie utrudnili sobie Państwo w ten sposób życie - zamiana na całkę podwójną prowadziła do konieczności liczenia jakiś koszmarnych całek. Dodatkowo wszycy w takiej sytuacji zapominali o liczeniu osobno całki po "denku"! Wniosek: jak Państwo mogą korzystać z tw. G-O to należy z niego korzystać, inaczej zaliczą się Państwo na śmierć.

Należało napisać (inaczej odejmowałam punkt), że korzysta się z tw. G-O!

W równości 2a występuje **minus** przed całką potrójną z uwagi na to, że powierzchnia S jest zorientowana **do wewnątrz.** Bardzo dużo osób zapomniało o tym minusie!

Anna Wasieczko

Żeby obliczyć 2b najprościej zauważyć, że funkcja podcałkowa jest równa 1, więc całka jest równa objętości bryły V, czyli półkuli o promieniu 2. Można liczyć wprost przechodząc np. na współrzędne sferyczne, ale... po co?

3. (10 pkt.) Obliczyć następującą całkę

$$\oint_L yxdx + y^2dy + zxdz,$$

gdzie L jest brzegiem trójkąta ABC dla $A = (0, 0, -2)$, $B = (2, 0, 0)$, $C = (0, 1, 0)$, zorientowanym w kierunku $ABCA$.

Rozwiązanie:

Ponieważ L jest krzywą zamkniętą kawałkami gładką, a pole wektorowe jest klasy C^1, więc będziemy chcieli skorzystać z tw. Stokesa. Obliczamy rotację:

$$rotF = [0, -z, -x].$$

Następnie wybieramy stronę trójkąta ABC, która będzie zgodna z orientacją krzywej L. Zauważmy, że stroną tą jest **strona górna**.
Korzystając z tw. Stokesa

$$\oint_L yxdx + y^2dy + zxdz = \iint_S rotF \circ dS = \iint_S -zdxdz - xdxdy,$$

gdzie S jest górną stroną trójkąta ABC.

Musimy teraz obliczyć całkę powierzchniową zorientowaną $\iint_S -zdxdz - xdxdy$.
Znajdujemy równanie płaszczyzny na której leży trójkąt ABC. Równanie ogólne płaszczyzny

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Po podstawieniu współrzędnych wierzchołków trójkąta do powyższego równania i przyjęciu np. $D = 1$, dostajemy prosty układ równań z niewiadomymi A, B, C. Stąd równanie płaszczyzny ma postać

$$\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z = 1.$$

Znajdujemy wzór na z oraz wektor normalny **górnej strony** trójkąta ABC:

$$\begin{aligned} z &= x + 2y - 2, \\ N &= \left[-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right] = [-1, -2, 1]. \end{aligned}$$

W takim razie
$$\iint_S -zdxdz - xdxdy = \iint_D (-2)(x+2y-2) - xdxdy,$$

gdzie D jest rzutem trójkąta ABC na płaszczyznę XOY, a więc D-trójkąt o wierzchołkach $(2,0)$, $(0,0)$, $(0,1$
Stąd
$$\iint_D (-2)(x+2y-2) - xdxdy = \int_0^2 \int_0^{-\frac{1}{2}x+1} x + 4y - 4dydx = -2.$$

Uwagi do Państwa rozwiązań:

Większość osób miała problem z określeniem prawidłowej strony trójkąta ABC. Standardowo narysowany rysunek mógł być zwodniczy (to co widać "od przodu" jest tak naprawdę **dolną** stroną trójkąta). Żeby mrówka miała obszar po lewej stronie, musi zostać postawiona "z tyłu" trójkąta, a więc na jego górnej stronie (jak ktoś nadal tego nie widzi, najlepiej wklepać w Wolframa i poobracać sobie układ współrzędnych).

4. (12 pkt.) Znaleźć wszystkie ekstrema funkcji
$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3yz + 3xz + 3xy.$$

Rozwiązanie:

Warunek konieczny istnienia ekstremum sprowadza się do
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 + 3y + 3z = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 + 3x + 3z = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 3z^2 + 3x + 3y = 0 \end{aligned}$$

Po podzieleniu wszystkich równań przez 3 i odjęciu stronami pierwszego i drugiego równania dostajemy:
$$x^2 - y^2 + y - x = 0$$

po zgrupowaniu
$$(x-y)(x+y-1) = 0.$$

Warunek konieczny jest więc równoważny układowi

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \vee x + y - 1 = 0 \\ y^2 + x + z &= 0 \\ z^2 + x + y &= 0 \end{aligned}$$

Zauważmy, że warunek $x + y - 1 = 0$ daje sprzeczność w równaniu $z^2 + x + y = 0$ (wtedy musiałoby być $z^2 + 1 = 0$). Ostatecznie więc

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ y^2 + x + z &= 0 \\ z^2 + x + y &= 0 \end{aligned}$$

Powyższy układ ma dwa rozwiązania:

$$P_1 = (0, 0, 0), \quad P_2 = (-2, -2, -2).$$

Przechodzimy do sprawdzenia warunku wystarczającego. Wyliczamy Hesjan:

$$H = \begin{bmatrix} 3x & 3 & 3 \\ 3 & 3y & 3 \\ 3 & 3 & 3z \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$H\left(P_1\right) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$H_2(P_1) = -9 < 0,$$

więc Hesjan jest nieokreślony. W punkcie P_1 brak ekstremum

Badamy istnienie ekstremum w punkcie P_2.

$$H\left(P_2\right) = \begin{bmatrix} -12 & 3 & 3 \\ 3 & -12 & 3 \\ 3 & 3 & -12 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$H_1(P_2) = -12 < 0, \quad H_2(P_2) = 135 > 0, \quad H_3(P_2) = -1350 < 0,$$

więc Hesjan jest ujemnie określony. W punkcie P_2 funkcja f przyjmuje maksimum. Wartość funkcji w tym punkcie wynosi

$$f(P_2) = -12.$$

Uwagi do Państwa rozwiązań:

Bardzo mało osób rozwiązało układ otrzymany z warunku koniecznego. Przypominam, że równania układu można dodawać/odejmować stronami!

$H\,(P_1)$ jest nieokreślony z uwagi na to, że minor wiodący główny rzędu 2 jest ujemny (proszę zerknąć na definicję różnych "określoności" macierzy i wykluczyć pozostałe możliwości).