

## Zestaw 1 - całka podwójna

1. Obliczyć całki podwójne

$$(a) \int_0^1 \int_0^1 xy dx dy,$$

$$(b) \int_0^a \int_0^b xy(x-y) dx dy.$$

2. Obliczyć całki podwójne po wskazanych prostokątach

$$(a) \iint_D dx dy, \text{ gdzie } D = [0, 1] \times [0, 2],$$

$$(b) \iint_D x \sin y dx dy, \text{ gdzie } D = [0, 1] \times [0, \pi],$$

$$(c) \iint_D \frac{y}{1+x^2} dx dy, \text{ gdzie } D = [0, 1] \times [0, 1],$$

$$(d) \iint_D xy \ln \frac{x}{y} dx dy, \text{ gdzie } D = [1, e] \times [1, 2].$$

3. Obliczyć całki podwójne po wskazanych obszarach  $D$

$$(a) \iint_D (2x+y-1) dx dy, \text{ gdzie } D \text{ jest trójkątem o wierzchołkach } (1, 1), (5, 3), (5, 5),$$

$$(b) \iint_D (2x+1) dx dy, \text{ gdzie } D \text{ jest trójkątem o wierzchołkach } (-1, 1), (1, 1), (0, 0),$$

$$(c) \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{ax-x^2}}, \text{ gdzie } D \text{ jest obszarem ograniczonym parabola } y^2 = -ax + a^2 \text{ oraz osią } Oy,$$

$$(d) \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{10+2x+y}}, \text{ gdzie } D \text{ jest obszarem ograniczonym parabola } y = x^2, \text{ osią } Ox, \text{ prostą } x = -1 \text{ oraz prostą } x = 3,$$

$$(e) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ gdzie } D : x^2 + y^2 - 2y \leq 0,$$

$$(f) \iint_D x dx dy, \text{ gdzie } D : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0,$$

$$(g) \iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dx dy, \text{ gdzie } D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0,$$

$$(h) \iint_D y^2 \sqrt{R^2 - x^2} dx dy, \text{ gdzie } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\},$$

$$(i) \iint_D \sin(x+y) dx dy, \text{ gdzie } D \text{-trójkąt o wierzchołkach } A = (0, 0), B = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), C = (\pi, 0),$$

$$(j) \iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy, \text{ gdzie } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 1, y \geq x\},$$

$$(k) \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy, \text{ gdzie } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}.$$

4. Obliczyć całkę  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}$ .

5. Obliczyć objętości brył ograniczonych podanymi powierzchniami

- (a)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ ,
- (b)  $z = 0, x = \pm a, y = \pm a, x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2, a > 0, z \geq 0$ ,
- (c)  $z = a^2 - x^2, y = 2x, x + y = a, z = 0, x = 0$ ,
- (d)  $z = x + y, xy = 1, xy = 2, x = y, y = 2x, z = 0, x, y > 0$ ,
- (e)  $z = xy, x + y + z = 1, z = 0$ ,
- (f)  $z = 2x^2 + y^2 + 1, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ ,
- (g)  $z = x^2 + y^2, z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ,
- (h)  $x^2 + y^2 + z^2 = 5, x^2 + y^2 = z - 1$ ,
- (i)  $z = 4 - x^2 - y^2, z^2 = 2x^2 + 2y^2 (z \geq 0)$ .

6. Obliczyć pole powierzchni:

- (a) części powierzchni  $2xy - z^2 = 0$  wyciętej przez prostopadłościan, którego podstawa znajduje się w płaszczyźnie  $Oxy$  a wierzchołki w punktach  $(0, 0), (4, 0), (4, 9), (0, 9)$ ,
- (b) części powierzchni walca  $x^2 + y^2 = 2$  ograniczonej płaszczyznami  $x + z = 0, x - z = 0, x, y > 0$ ,
- (c) części powierzchni  $z = 2xy$  ograniczonej walcem  $x^2 + y^2 = 1$  oraz  $x = 0, y = 0$ ,
- (d) części powierzchni  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , która jest zawarta wewnątrz walca  $x^2 + y^2 = 2x$ ,
- (e) części powierzchni  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, a > 0, b > 0, c > 0$  zawartej między płaszczyznami  $x, y, z = 0$ ,
- (f) części powierzchni  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  wyciętej walcem  $x^2 + y^2 = a^2$ , gdzie  $(a < R)$ ,
- (g) części powierzchni  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  wyciętej walcem  $x^2 + y^2 = Rx$ .

7. Znaleźć pole powierzchni całkowitej bryły ograniczonej sferą  $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$  i paraboloidą  $x^2 + y^2 = 2az (a > 0)$ .

8. Obliczyć masę następujących figur płaskich:

- (a) trójkąta o wierzchołkach w punktach  $(0, 0), (1, 0), (0, 2)$  wiedząc, że gęstość w punkcie  $(x, y)$  jest równa  $xy$ ,
- (b) figury danej jako  $x^2 + y^2 \leq 4, y \geq \sqrt{3}|x|$  wiedząc, że gęstość w punkcie  $(x, y)$  jest równa odległości tego punktu od osi  $x$ ,
- (c) figury ograniczonej krzywymi  $y = x^3, y = x^2$  wiedząc, że gęstość w punkcie  $(x, y)$  jest równa  $x^2y$ .

9. Znaleźć momenty statyczne i momenty bezwładności:

- (a) półkola (o gęstości  $\rho$  równej kwadratowi odległości danego punktu od środka półkola) o promieniu  $R$ , względem osi leżącej w płaszczyźnie półokręgu, równoległej do średnicy i oddalonej od niej o  $d$  jednostek długości,
- (b) figury jednorodnej ograniczonej krzywymi o równaniach  $y = x^2$  i  $y = 1$ , względem prostej  $x + y = 1$ ,
- (c) trójkąta jednorodnego ograniczonego prostymi  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  ( $a, b > 0$ ), względem osi układu.
10. Znaleźć współrzędne środków ciężkości figur ograniczonych krzywymi o równaniach, i o danych gęstościach punktowych:
- (a)  $x + y = a$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $\rho(x, y) = y$ ,
- (b)  $y = \ln x$ ,  $y = 0$ ,  $x = e$ ,  $\rho(x, y) = \frac{1}{x}$
- (c)  $y = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $\rho(x, y) = 1$
- (d)  $y = x^2$ ,  $y = \sqrt{x}$ ,  $\rho(x, y) = 1$ .
-